Jurnal Matematika UNAND
Vol. **15** No. **3** Hal. 427 – 435
Edisi Juli 2026
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410
©Departemen Matematika dan Sains Data FMIPA UNAND
https://doi.org/10.25077/jmua.15.3.427-435.2026

THE MOORE–PENROSE INVERSE OF SYMMETRIC MATRICES WITH EQUITABLE PARTITIONS AND DIVISOR MATRICES (INVERS MOORE–PENROSE DARI MATRIKS SIMETRIS DENGAN PARTISI EKUITERBAGI DAN MATRIKS PEMBAGI)

DESI LIRA ANTIKA, YANITA YANITA*, MONIKA RIANTI HELMI

Departemen Matematika dan Sains Data, Universitas Andalas
Kampus Unand Limau Manis, Padang 25163, Indonesia
email : yanita@sci.unand.ac.id

Diajukan 20 April 2026 Direvisi 23 Mei 2026
Diterima 7 Juli 2026 Diterbitkan 31 Juli 2026

Abstrak. Matriks simetri dengan partisi seimbang adalah matriks yang mempunyai blok partisi yang memiliki rata-rata jumlah baris dan kolom yang sama. Jumlah dari rata-rata baris dan kolom ini kemudian disusun menjadi suatu matriks, yang disebut sebagai matriks pembagi. Tujuan dari tulisan ini adalah menganalisis hubungan matriks pembagi invers Moore-Penrose dari matriks simetri A yang dapat dipartisi seimbang dengan invers Moore-Penrose matriks pembagi dari A. Selanjutnya, diperoleh bahwa matriks pembagi dari invers Moore-Penrose dari matriks A sama dengan invers Moore-Penrose dari matriks pembagi A.

Kata Kunci: invers Moore-Penrose, matriks simetri, matriks pembagi, partisi seimbang

Abstract. *A balanced partitioned symmetric matrix is a matrix that has partition blocks that have the same average number of rows and columns. The sum of these average rows and columns is then arranged into a matrix, which is called the divisor matrix. The purpose of this paper is to analyze the relationship between the Moore-Penrose inverse divisor matrix of a balanced partitioned symmetric matrix A and the Moore-Penrose inverse divisor matrix of A. Furthermore, it is obtained that the divisor matrix of the Moore-Penrose inverse of matrix A is the same as the Moore-Penrose inverse of the divisor matrix of A.*

Keywords: Moore-Penrose inverse, symmetric matrix, divisor matrix, balanced partition

*Penulis korespondensi

1. Pendahuluan

Teori invers semu pertama kali dikenalkan oleh E. H. Moore pada tahun 1920 [1], dan dikembangkan oleh R. Penrose pada tahun 1955 [2]. Invers ini kemudian dikenal sebagai inverse Moore-Penrose. Seiring perkembangan ilmu matematika khususnya teori matriks, maka perkembangan metode penentuan invers semu, khususnya invers Moore-Penrose juga berkembang dengan pesat.

Terdapat beberapa metode penentuan invers Moore-Penrose (lihat [3,4,5,6,7, 8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18]). Pada kajian [3,4,5] dan [14], penentuan invers ini dengan menggunakan partisi dan faktorisasi matriks. Pada kajian [6,7,8], penentuan invers dengan menggunakan bantuan operasi baris elementer, sedangkan pada kajian [9,10,11,12,13], [15] dan [16] menggunakan metode iterasi. Selanjutnya pada [7] dan [18] kajian invers ini dikaitkan pada matriks khusus. Aplikasi teori invers Moore-Penrose ini pada teori aljabar abstrak dapat dilihat pada [19] dan pada *machine learning* dapat dilihat pada [20]. Invers Moore-Penrose ini juga diaplikasikan pada graf [21]. Pada kajian-kajian tersebut invers Moore-Penrose dikaji berdasarkan metode dan aplikasi terhadap teori ilmu matematika yang lain. Oleh karena itu pada tulisan ini kajian difokuskan pada hubungan invers Moore-Penrose pada matriks yang dapat dipartisi secara seimbang dengan matriks pembagi dari matriks tersebut.

Definisi 1.1. *[22] Misalkan $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dikatakan B similar secara orthogonal jika terdapat matriks P sedemikian sehingga $B = P^T AP$.*

Definisi 1.2. *[22] Matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dikatakan matriks orthogonal jika $A^{-1} = A^T$, atau jika $AA^T = A^T A = I$.*

Teorema 1.3. *[22] Jika $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan A adalah matriks simetris, maka:*

(a) Nilai eigen dari A semuanya adalah bilangan riil.
(b) Vektor eigen yang berasal dari ruang eigen yang berbeda saling orthogonal.

Bukti.

(a) Misalkan λ adalah nilai eigen dari A, dan v adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ. Berdasarkan definisi nilai eigen dan vektor eigen, $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ dengan $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Jika di kedua ruas dikalikan dengan $\overline{\mathbf{v}}^T$, maka:

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

jika hanya jika

$$\overline{\mathbf{v}}^T A\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}^T \lambda\mathbf{v} = \lambda(\overline{\mathbf{v}}^T\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{v}.\mathbf{v}) = \lambda\|\mathbf{v}\|^2.$$

Dengan demikian diperoleh:

$$\lambda = \frac{\overline{\mathbf{v}}^T A\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}.$$

Oleh karena penyebut dari $\frac{\overline{\mathbf{v}}^T A\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}$ adalah bilangan riil, maka dapat dibuktikan bahwa λ adalah bilangan riil dengan menunjukkan bahwa $\overline{\mathbf{v}^T A\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}^T A\mathbf{v}$ sebagai berikut. Oleh karena A adalah matriks simetri dengan entri-entri di himpunan bilangan riil, maka:

$$\overline{\mathbf{v}^T A\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}^T\, \overline{A\mathbf{v}} = \mathbf{v}^T \overline{A\mathbf{v}} = (\overline{A\mathbf{v}})^T\mathbf{v} = (\overline{A}\,\overline{\mathbf{v}})^T\mathbf{v} = (A\overline{\mathbf{v}})^T\mathbf{v} = (\overline{\mathbf{v}})^T A^T\mathbf{v} = (\overline{\mathbf{v}})^T A\mathbf{v}.$$

(Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah vektor kolom di $\mathbb{R}^n$, maka $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = \mathbf{v}^T\mathbf{u}$).

(b) Misalkan $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$ adalah vektor-vektor eigen dari nilai eigen yang berbeda, λ_1 dan λ_2 dari matriks A. Akan dibuktikan bahwa $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = 0$. Perhatikan bahwa jika A matriks $n\times n$, $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah matriks $n\times 1$, maka $A\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot A^T\mathbf{v}$ dan $\mathbf{u}\cdot A\mathbf{v} = A^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. Jadi,

$$A\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1\cdot A^T\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1\cdot A\mathbf{v}_2.$$

Selanjutnya, oleh karena $\mathbf{v}_1$ vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1, dan $\mathbf{v}_2$ vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_2, maka $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ dan $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$, sehingga diperoleh:

$$A\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1\cdot A\mathbf{v}_2 \Leftrightarrow \lambda_1\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1\cdot\lambda_2\mathbf{v}_2 \Leftrightarrow (\lambda_1-\lambda_2)(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) = 0.$$

Oleh karena $\lambda_1\neq\lambda_2$, maka $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$. Dengan demikian diperoleh $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2 = 0$, atau terbukti $\mathbf{v}_1$ dan $\mathbf{v}_2$ ortogonal. □

Teorema 1.4. *[22] Jika A adalah matriks $n\times n$, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekivalen:*

(a) Matriks A dapat didiagonalisasi secara orthogonal.
(b) Matriks A memiliki sebuah himpunan vektor-vektor eigen yang orthonormal.
(c) Matriks A adalah simetris.

Bukti.

($a\Rightarrow b$) Diketahui A dapat didiagonalisasi secara orthogonal, akan dibuktikan A memiliki himpunan vektor-vektor yang orthonormal. Oleh karena A terdiagonalisasi secara orthogonal, berarti terdapat matriks orthogonal P sedemikian sehingga $P^TAP = P^{-1}AP = D$. Perhatikan bahwa $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow AP = PD$, sehingga diperoleh:

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{21} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n}\\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{21} & \cdots & \lambda_n p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn}\end{bmatrix}.$$

Misalkan bahwa $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{11}\\ p_{21}\\ \vdots\\ p_{n1}\end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{12}\\ p_{21}\\ \vdots\\ p_{n2}\end{bmatrix}, \cdots, \mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} p_{1n}\\ p_{2n}\\ \vdots\\ p_{nn}\end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor kolom dari P. Oleh karena P orthogonal, maka kolom-kolom di P dapat dinormalkan. Dengan demikian terdapat himpunan vektor ortonormal pada A.

($b \Rightarrow a$) Diketahui A memiliki himpunan yang ortonormal, akan dibuktikan A terdiagonalisasi secara orthogonal. Misalkan A memiliki himpunan n vektor eigen yang ortonormal, yaitu $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$, maka matriks $P = [\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \cdots\ \mathbf{p}_n]$, berdasarkan Teorema 1.3, matriks P ini mendiagonalisasi matriks A sedemikian sehingga $P^{-1}AP = D$.

$$AP = A\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{21} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{21} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}.$$

Oleh karena matriks P adalah matriks ortonormal, maka P adalah matriks orthogonal. Berdasarkan Teorema 1.3, matriks ini mendiagonalisasi matriks A.

($a \Rightarrow c$) Oleh karena matriks A terdiagonalisasi secara orthogonal, maka terdapat matriks P sedemikian sehingga $D = P^TAP$, dan karena P matriks orthogonal, maka $P^{-1} = P^T$, atau jika $PP^T = P^TP = I$. Dengan demikian diperoleh $A = PDP^T$. Perhatikan bahwa

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PD^T P^T = PDP^T = A.$$

Jadi diperoleh $A = A^T$, atau terbukti A adalah matriks simetri.

($c \Rightarrow a$) Misalkan A adalah matriks simetri. Berdasarkan Teorema 1.3, diperoleh bahwa vektor eigen yang berasal dari ruang eigen yang berbeda saling orthogonal. Dengan demikian dapat dilakukan proses Gram-Schmidt, sehingga diperoleh himpunan yang ortonormal dari vektor-vektor eigen. Bentuk matriks Q dengan vektor-vektor ortonormal ini menjadi kolom-kolom pada Q. Berdasarkan Teorema 1.3, matriks ini invertibel, dan $Q^{-1}AQ = D$, dengan D adalah matriks diagonal dengan entri diagonal utama adalah nilai-nilai eigen dari A. Oleh karena Q kolom-kolomnya orthogonal, maka $Q^{-1} = Q^T$, sehingga:

$$Q^{-1}AQ = D \Leftrightarrow Q^TAQ = D.$$

Terbukti matriks A dapat didiagonalisasi orthogonal. □

Berdasarkan Teorema 1.3 dan Teorema 1.4, langkah-langkah dekomposisi orthogonal pada matriks simetri A adalah:

(1) Tentukan sebuah basis untuk setiap ruang eigen matriks A (dengan demikian terdapat proses penentuan nilai eigen dan vector eigen/ruang eigen)
(2) Terapkan proses Gram-Schmidt pada masing-masing basis ini untuk mendapatkan basis orthonormal.
(3) Bentuk sebuah matriks P yang kolom-kolomnya adalah vektor-vektor basis yang dibuat pada Langkah no.2; matriks ini secara orthogonal mendiagonalisasi A.
(4) Uji $P^TAP = D$, dengan D adalah matriks diagonal dengan entri diagonal adalah nilai-nilai eigen dari A.

Definisi 1.5. *[23] Misalkan $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Matriks $A^+ \in \mathbb{C}^{n\times m}$ disebut invers Moore-Penrose (atau pseudoinverse = invers semu) dari A jika A^+ memenuhi:*

(1) $AA^+A = A$,

(2) $A^+AA^+ = A^+$,
(3) $(AA^+)^* = AA^+$, *dan*
(4) $(A^+A)^* = A^+A$.

Teorema 1.6. *[23] Misalkan* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *matriks simetri, maka invers Moore-Penrose dari* A *adalah:*

$$A^+ = PD^+P^T,$$

dengan $A = PDP^T$, $(D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n))$, *dan* $D^+ = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$, *dengan* $\mu_i = \frac{1}{\lambda_i}$. *Nilai* $\frac{1}{\lambda_i}$ *hanya untuk nilai eigen yang tidak nol; untuk* $\lambda_i = 0$, *entri di pseudoinversenya harus* 0.

Bukti. Oleh karena A matriks simetri, maka dapat dilakukan diagonalisasi orthogonal, yaitu terdapat matriks orthogonal P $(P^TP = I)$ sedemikian sehingga $A = PDP^T$, dengan D matriks diagonal dengan entri pada diagonal utama adalah nilai eigen A. Definisikan $X = PD^+P^T$. Akan dibuktikan bahwa $X = A^+ = PD^+P^T$ memenuhi seluruh sifat pada Definisi 1.5, yaitu:

(1) Akan ditunjukkan $AXA = A$, yaitu:

$$AXA = (PDP^T)(PD^+P^T)(PDP^T) = PDD^+DP^T = PDP^T = A.$$

(Oleh karena D matriks diagonal, maka $DD^+D = D$).
(2) Akan ditunjukkan $XAX = X$, yaitu:

$$XAX = (PD^+P^T)(PDP^T)(PD^+P^T) = PD^+DD^+P^T = PD^+P^T = X.$$

(3) Akan ditunjukkan $(AX)^T = AX$, yaitu:

$$AX = (PDP^T)(PD^+P^T) = PDD^+P^T,$$
$$(AX)^T = (PDD^+P^T)^T = PDD^+P^T = AX.$$

(4) Akan ditunjukkan $(XA)^T = XA$, yaitu:

$$XA = (PD^+P^T)(PDP^T) = PD^+P^TPDP^T = PD^+DP^T,$$
$$(XA)^T = \big((PD^+P^T)(PDP^T)\big)^T = (PD^+P^TPDP^T)^T = PD^+DP^T.$$

Jadi X memenuhi keempat persamaan Moore-Penrose seperti pada Definisi 1.5, terbukti $X = A^+ = PD^+P^T$. □

Berdasarkan Teorema 1.4, diperoleh langkah-langkah penentuan invers Moore-Penrose untuk matriks simetri A, adalah:

(1) Tentukan dekomposisi orthogonal pada matriks A $(A = PDP^T)$.
(2) Hitung $A^+ = PD^+P^T$.

2. Pembahasan

Definisi 2.1. *Misalkan A adalah matriks. Matriks A dikatakan dapat dipartisi seimbang jika masing-masing blok partisi dari A memiliki rata-rata jumlah baris dan kolom yang sama.*

Definisi 2.2. *Misalkan A adalah matriks yang dipartisi seimbang. Matriks pembagi dari A adalah matriks yang entri-entrinya adalah rata-rata dari blok partisi dari A, dan disimbolkan dengan $A(\Pi)$.*

Contoh 2.3. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Matriks ini dapat dipartisi seimbang menjadi $\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right]$.

Teorema 2.4. *Misalkan A adalah matriks simetri dengan partisi seimbang, maka matriks pembagi dari invers Moore-Penrose dari matriks A sama dengan invers Moore-Penrose dari matriks pembagi A, atau*

$$A^+(\Pi) = (A(\Pi))^+.$$

Bukti. Misalkan indeks baris/kolom $\{1, 2, \cdots, n\}$ dipartisi menjadi k blok ($\Pi = C_1, C_2, \cdots, C_k$) dengan $|C_i| = n_i$.

Definisikan matriks karakteristik dari Π, yaitu $H \in \mathbb{R}^{n\times k}$ dengan definisi:

$$H_{pi} = \begin{cases} 1, & p \in C_i, \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

dan ($D = \text{diag}(n_1, n_2, \cdots, n_k)$).

Dari Definisi 2.1, entri matriks pembagi ($A(\Pi) \in \mathbb{R}^{k\times k}$) adalah rata-rata entri pada blok (C_i, C_j) yaitu:

$$(A(\Pi))_{ij} = \frac{1}{n_i n_j} \sum_{p\in C_i} \sum_{q\in C_j} a_{pq}.$$

Secara matriks dapat ditulis ringkas sebagai:

$$A(\Pi) = D^{-1}H^T AHD^{-1}. \tag{2.1}$$

Demikian juga untuk ($A^+(\Pi)$):

$$A^+(\Pi) = D^{-1}H^T A^+ HD^{-1}. \tag{2.2}$$

Definisikan $S = HD^{-1/2} \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Oleh karena $H^T H = D$, maka diperoleh:

$$S^T S = D^{-1/2}H^T HD^{-1/2} = D^{-1/2}DD^{-1/2} = I_k.$$

Dengan demikian diperoleh kolom-kolom S adalah ortonormal.

Oleh karena matriks A adalah matriks dengan partisi seimbang, maka setiap baris di dalam blok yang sama punya rata-rata yang sama terhadap blok lain, sehingga mengalikan vektor yang konstan pada blok tetap menghasilkan vektor yang konstan pada blok. Dengan demikian terdapat matriks $B \in \mathbb{R}^{k\times k}$ sedemikian sehingga:

$$AH = HB. \tag{2.3}$$

Kemudian kalikan ruas kanan dengan $D^{-1/2}$, maka diperoleh:

$$AHD^{-1/2} = HBD^{-1/2}, \tag{2.4}$$

ekivalen dengan:

$$AHD^{-1/2} = H(D^{-1/2}D^{-1/2})BD^{-1/2}, \tag{2.5}$$

ekivalen dengan:

$$A(HD^{-1/2}) = (HD^{-1/2})(D^{-1/2}BD^{-1/2}). \tag{2.6}$$

Oleh karena $S = HD^{-1/2}$ maka diperoleh:

$$AS = SK, \text{ dengan } K = S^TAS \text{ (karena } S^TS = I). \tag{2.7}$$

Artinya subruang $U = span(S)$ adalah subruang invariant terhadap A. Oleh karena A adalah matriks simetri, maka $U^\perp$ juga invariant. Jadi terdapat dekomposisi ortogonal $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$ dengan basis ortonormal yang sesuai dan matriks A berbentuk blok diagonal:

$$A \sim \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \text{ dengan } K = S^TAS \text{ dan } C = A|_{U^\perp}.$$

Untuk matriks blok diagonal simetri berlaku:

$$A^+ \sim \begin{bmatrix} K^+ & 0 \\ 0 & C^+ \end{bmatrix}.$$

Akibatnya, pada subruang U berlaku:

$$S^TA^+S = K^+ = (S^TAS)^+ \tag{2.8}$$

Oleh karena $K = S^TAS$ dan $S = HD^{1/2}$, maka diperoleh:

$$K = S^TAS = D^{-1/2}H^TAHD^{-1/2}.$$

sehingga

$$A(\Pi) = D^{-1}H^TAHD^{-1} = D^{-1/2}KD^{-1/2}. \tag{2.9}$$

Demikian pula dari Persamaan 2.2,

$$A^+(\Pi) = D^{-1}H^TA^+HD^{-1} = D^{-1/2}(S^TA^+S)D^{-1/2}. \tag{2.10}$$

Dari Persamaan 2.9 dan karena $D^{-1/2}$ invertibel, maka diperoleh:

$$(RKR^T)^+ = R^{-T}K^+R^{-1}.$$

Ambil $R = D^{-1/2}$ dan karena D matriks diagonal positif maka $R^{-1} = D^{-1/2}$ dan $R^T = D^{-1/2}$. Dengan demikian,

$$(A(\Pi))^+ = (D^{-1/2}KD^{-1/2})^+ = D^{1/2}K^+D^{1/2}. \tag{2.11}$$

Selanjutnya dari Persamaan 2.10 dan Persamaan 2.8, diperoleh:

$$A^+(\Pi) = D^{-1/2}(S^T A^+ S)D^{-1/2} = D^{-1/2}K^+D^{-1/2} = (A(\Pi))^+. \tag{2.12}$$

Dengan demikian terbukti bahwa:

$$A^+(\Pi) = (A(\Pi))^+. \qquad \square$$

Contoh 2.5. Perhatikan matriks pada Contoh 2.3. Invers Moore Penrose dari A dicari dengan metode dekomposisi orthogonal, diperoleh:

$$A^+ = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix}.$$

Matriks pembagi dari A^+ (dengan partisi yang sama dengan A), yaitu:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{5}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{3}{16} & \frac{5}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} \\ \hline -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{array}\right].$$

adalah $[A^+(\Pi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$. Invers Moore Penrose dari $A(\Pi) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ (dicari dengan metode dekomposisi orthogonal) adalah $(A(\Pi))^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$.

3. Ucapan Terima kasih

Penelitian ini didanai oleh Universitas Andalas dengan Kontrak No. 345/UN16.19/PT.01.03/PSS/2025 mendapatkan Anggaran Penelitian RKAT Universitas Andalas Anggaran 2025.

Daftar Pustaka

[1] E. H. Moore. On the reciprocal of the general algebraic matrix. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 26(9):394–395, 1920.

[2] R. Penrose. A generalized inverse for matrices. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 51(3):406–413, 1955.

[3] P. Patrício. The moore–penrose inverse of a factorization. *Linear Algebra and its Applications*, 370:227–235, 2003.

[4] K. Sivakumar. A new characterization of nonnegativity of moore–penrose inverses of gram operators. *Positivity*, 13(1):277–286, 2008.

[5] P. S. Stanimirović and M. B. Tasić. Computing generalized inverses using lu factorization of matrix product. *International Journal of Computer Mathematics*, 85(12):1865–1878, 2008.

[6] F. Toutonian and A. Ataei. A new method for computing moore–penrose inverse matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 228(1):412–417, 2009.

[7] W. Guo and T. Huang. Method of elementary transformation to compute moore–penrose inverse. *Applied Mathematics and Computation*, 216(5):1614–1617, 2010.

[8] V. N. Katsikis, D. Pappas, and A. Petralias. An improved method for the computation of the moore–penrose inverse matrix. *Applied Mathematics and Computation*, 217(23):9828–9834, 2011.

[9] M. D. Petković and P. S. Stanimirović. Iterative method for computing the moore–penrose inverse based on penrose equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(6):1604–1613, 2011.

[10] J. Ji and X. Chen. A new method for computing moore–penrose inverse through gauss-jordan elimination. *Applied Mathematics and Computation*, 245:271–278, 2014.

[11] M. D. Petković and P. S. Stanimirović. Two improvements of the iterative method for computing moore–penrose inverse based on penrose equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 267:61–71, 2014.

[12] A. Ataei. Improved qrginv algorithm for computing moore–penrose inverse matrices. *ISRN Applied Mathematics*, 2014:1–5, 2014.

[13] Y. Hakopian. Calculating of inverse moore–penrose mapping for bidiagonal matrices. *Mohyla Mathematical Journal*, 2:11–23, 2019.

[14] A. Alazemi, M. Andelić, and D. Cvetković-Ilić. The moore–penrose inverse of symmetric matrices with nontrivial equitable partitions. *Applied Mathematics and Computation*, 400:1–11, 2021.

[15] Z. Iram and A. Zein. A new family of second-order iterative methods for computing the moore–penrose inverse based on penrose equations. *International Journal of Applied Mathematics*, 35(3), 2022.

[16] S. Sheikhi and H. Esmaeili. A new iterative method to find the moore–penrose inverse. 2023.

[17] K. Zuo. Further representations and computations of the generalized moore–penrose inverse. *AIMS Mathematics*, 8(10):23442–23458, 2023.

[18] Y. Hakopian. The moore–penrose inverse of tridiagonal skew-symmetric matrices ii. *Proceedings of the YSU Physical and Mathematical Sciences*, 57(2):31–43, 2023.

[19] H. Zhu, J. Chen, X. Zhang, and P. Patrício. The moore–penrose inverse of 2×2 matrices over a certain *-regular ring. *Applied Mathematics and Computation*, 246:263–267, 2014.

[20] S. Lu, X. Wang, G. Zhang, and X. Zhou. Effective algorithms of the moore–penrose inverse matrices for extreme learning machine. *Intelligent Data Analysis*, 19(4):743–760, 2015.

[21] I. Jeyaraman, D. T., and A. R. The moore–penrose inverse of the distance matrix of a helm graph. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 39:94–109, 2023.

[22] H. Anton and C. Rorres. *Elementary Linear Algebra*. Wiley, USA, 11 edition, 2014.

[23] J. R. Schott. *Matrix Analysis for Statistics*. John Wiley and Sons, New Jersey, 3 edition, 2017.