

TRANSFORMATION OF COMPARTMENT MODELS INTO 1D RANDOM WALKS ON WEIGHTED DIGRAPHS (TRANSFORMASI MODEL KOMPARTEMEN MENJADI JALAN ACAK 1D PADA DIGRAF BERBOBOT)

ALFI MAULANI^{a*}, ANDRI SOFYAN HUSEIN^b

^a Department of Mathematics, Universitas Pamulang,

^b Department of Industrial Engineering, Universitas Buddhi Dharma.
email : dosen02330@unpam.ac.id, andrihusein08@gmail.com

Diajukan 1 Juni 2026 Direvisi 9 Juli 2026 Diterima 14 Juli 2026
Diterbitkan 22 Oktober 2026

Abstrak. Penelitian ini mengonstruksi transformasi model kompartemen dinamis kontinu menjadi *Discrete-Time Markov Chain* (DTMC) berbasis *1D Random Walk* dengan menonjolkan sifat-sifat kombinatorika pada *weighted digraph*. Sifat kombinatorika jaringan dianalisis melalui dekomposisi simpul kompartemen dan pemetaan matriks ketetanggaan terbobot untuk menjamin kekekalan aliran pada setiap busur graf. Analisis kestabilan titik kesetimbangan tunggal sistem kontinu dilakukan menggunakan pendekatan struktur jaringan dengan *Cyclic Small-Gain Theorem* untuk matriks Metzler dan lokalisasi spektral Teorema Lingkaran Gershgorin. Hasil penelitian membuktikan adanya konsistensi struktural yang kuat, di mana nilai penguatan siklus (*loop gain*) kombinatorik graf bernilai antara 0 dan 1 sebagai peredam alami populasi. Lebih lanjut, distribusi stasioner dari langkah acak mikro terbukti konvergen secara presisi menuju rasio titik kesetimbangan makro, mengonfirmasi hubungan ketat antara struktur kombinatorika graf berbobot dan sistem stokastik.

Kata Kunci: *1D Random Walk, Discrete-Time Markov Chain, Kombinatorika Jaringan, Metzler Matrix, Weighted Digraph*

Abstract. This study constructs a transformation of a continuous dynamic compartment model into a *Discrete-Time Markov Chain* (DTMC) based on a one-dimensional (1D) random walk, specifically emphasizing the combinatoric properties of a weighted digraph. The network's combinatoric characteristics are analyzed through vertex decomposition of the compartments and the mapping of a weighted adjacency matrix to ensure flow conservation across each directed edge. The stability analysis of the system's unique equilibrium point is conducted using network topology approaches via the *Cyclic Small-Gain Theorem* for Metzler matrices and spectral localization using Gershgorin's Disc Theorem. The results demonstrate a robust structural consistency, where the combinatoric loop gain of the graph strictly ranges between 0 and 1, acting as a natural damping mechanism for the population. Furthermore, the stationary distribution of the micro-level random walk precisely converges to the macro-level equilibrium

*Penulis korespondensi

ratio, confirming a strict mathematical link between the combinatoric structure of the weighted graph and the stochastic behavior of the system.

Keywords: 1D Random Walk, Discrete-Time Markov Chain, Metzler Matrix, Network Combinatorics, Weighted Digraph

1. Pendahuluan

Pemodelan sistem kompartemen secara konvensional umumnya bergantung pada sistem persamaan diferensial kontinu untuk mengamati dinamika populasi makro [1,2,3]. Meskipun pendekatan deterministik ini efektif dalam menangkap tren global, ia sering kali mengabaikan arsitektur fisik interaksi dan struktur ruang tempat entitas tersebut bergerak. Dalam analisis sistem jaringan, sifat kombinatorika dari jalur perpindahan antar-kompartemen memegang peran krusial dalam menentukan perilaku asimtotik sistem [4,5,6]. Oleh karena itu, diperlukan sebuah representasi matematis yang mampu mengawinkan struktur diskrit dengan dinamika kontinu, salah satunya melalui pemanfaatan teori graf.

Weighted digraph menyediakan kerangka kerja kombinatorik yang kuat untuk merepresentasikan interaksi antar-kompartemen [7,8]. Setiap kompartemen pada graf diidentifikasi sebagai simpul (*vertex*), sementara laju perpindahan antar-kompartemen dipetakan sebagai busur berarah (*arc*) yang memiliki bobot numerik tertentu. Sifat kombinatorik jaringan ini ditentukan oleh *weighted adjacency matrix* yang mengatur bagaimana aliran entitas didistribusikan. Salah satu tantangan utama dalam analisis *weighted digraph* adalah menjamin hukum kekekalan aliran pada setiap simpul, di mana derajat masuk (*in-degree*) dan derajat keluar (*out-degree*) harus membentuk keseimbangan struktur yang mencegah terjadinya singularitas pada sistem.

Di sisi lain, perilaku makro yang diturunkan dari struktur graf deterministik sering kali menyembunyikan fluktuasi acak pada tingkat individu. Untuk menjembatani celah skala ini, model kompartemen kontinu perlu ditransformasikan ke dalam representasi stokastik mikro. Proses transformasi ini dapat dicapai dengan memanfaatkan *Discrete-Time Markov Chain* melalui formulasi *1D random walk* [3,9,10]. Masalah matematis yang timbul adalah bagaimana membuktikan secara analitis bahwa probabilitas transisi diskrit yang dibangun di atas struktur kombinatorika graf tetap konsisten dan konvergen menuju parameter deterministiknya ketika sistem mencapai *steady state*.

Beberapa penelitian terdahulu telah menerapkan graf berarah untuk analisis jaringan dinamis [11,12]. Namun, sebagian besar literatur memisahkan analisis struktur kombinatorika aljabar dengan transformasi stokastiknya, atau mengabaikan sifat matriks pembatas seperti matriks Metzler dalam penentuan lokalisasi spektral nilai eigennya. Penelitian ini bertujuan untuk mengisi celah tersebut dengan merumuskan transformasi formal dari model kompartemen dinamis menjadi DTMC berbasis *1D Random Walk* pada *weighted digraph*. Fokus utama penelitian ini ditekankan pada analisis sifat kombinatorika jaringan melalui *Cyclic Small-Gain Theorem* dan Teorema Lingkaran Gershgorin untuk membuktikan kestabilan asimtotik serta konsistensi struktur konvergensi sistem dari skala

mikro ke makro.

2. Landasan Teori

2.1. *Kombinatorika Weighted Digraph*

Diberikan sebuah *weighted digraph* $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{W})$, di mana $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan hingga simpul yang merepresentasikan kompartemen, dan $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ adalah himpunan *arc* yang merepresentasikan jalur perpindahan entitas. Fungsi pembobotan didefinisikan sebagai $\mathcal{W} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^+$, yang memetakan setiap *arc* $e_{ij} = (v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ ke sebuah bobot positif $w_{ij} > 0$, yang melambangkan laju transisi dari simpul v_i ke simpul v_j .

Weighted adjacency matrix $W = [w_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dari graf $\mathcal{G}$ didefinisikan sebagai:

$$w_{ij} = \begin{cases} \mathcal{W}(v_i, v_j), & \text{jika } (v_i, v_j) \in \mathcal{E}, \\ 0, & \text{jika } (v_i, v_j) \notin \mathcal{E}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Struktur kombinatorika dari lintasan tertutup pada $\mathcal{G}$ dianalisis menggunakan konsep siklus terarah (*directed cycles*). Sebuah siklus $\mathcal{C}$ pada graf $\mathcal{G}$ dikatakan sebagai siklus Hamilton jika $\mathcal{C}$ mengunjungi setiap simpul di $\mathcal{V}$ tepat satu kali.

2.2. *Matriks Metzler dan Spektrum Nilai Eigen*

Definisi 2.1. Sebuah matriks kuadrat $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dikatakan sebagai Metzler matrix jika seluruh elemen di luar diagonal utamanya bernilai non-negatif, yaitu $a_{ij} \geq 0$ untuk semua $i \neq j$.

Sifat spektral dari matriks Metzler dianalisis menggunakan lokalisasi nilai eigen via Teorema Lingkaran Gershgorin [13,14].

Teorema 2.2 (Teorema Lingkaran Gershgorin). Sifat spektral atau seluruh nilai eigen λ dari matriks $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berada di dalam gabungan cakram-cakram Gershgorin $\mathcal{D}_i$, yang didefinisikan sebagai:

$$\mathcal{D}_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

2.3. *Discrete-Time Markov Chain (DTMC) dan 1D Random Walk*

Diberikan ruang probabilitas $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Proses stokastik $X_k, k \in \mathbb{N}_0$ merupakan DTMC parametrik berdimensi berhingga jika memenuhi sifat Markov [15,16]:

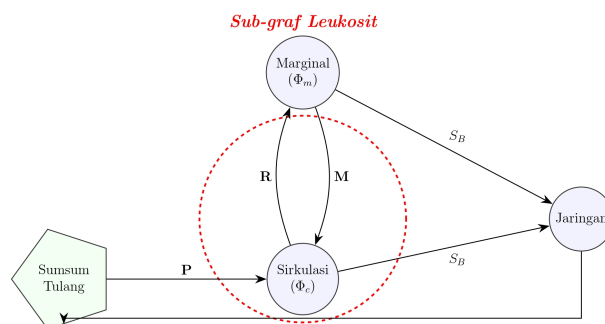
$$P(X_{k+1} = j \mid X_k = i, X_{k-1} = i_{k-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{k+1} = j \mid X_k = i) = p_{ij}, \quad (2.3)$$

di mana $p_{ij} \geq 0$ adalah probabilitas transisi satu-langkah dari state i ke state j yang memenuhi kondisi kelayakan stokastik $\sum_j p_{ij} = 1$. *1D Random Walk* pada graf $\mathcal{G}$ merupakan bentuk khusus DTMC di mana perpindahan state dibatasi pada simpul-simpul bertetangga yang terhubung melalui busur di $\mathcal{E}$.

3. Pembahasan

3.1. Konstruksi Graf dan Matriks Kompartemen Kontinu

Sistem kompartemen dinamis untuk marginasi sel direpresentasikan melalui *weighted digraph* $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{W})$ dengan dua simpul utama $\mathcal{V} = v_c, v_m$, di mana v_c melambangkan kelompok sirkulasi (Φ_c) dan v_m melambangkan kelompok marginal (Φ_m). Sifat kombinatorika dari interaksi antar-simpul diatur oleh himpunan *arc* $\mathcal{E} = (v_c, v_m), (v_m, v_c)$ dengan fungsi pembobotan $\mathcal{W}(v_c, v_m) = w_{cm}$ dan $\mathcal{W}(v_m, v_c) = w_{mc}$. Selain itu, terdapat aliran disipasi keluar dari graf menuju jaringan tubuh yang dikunci pada simpul v_m dengan bobot eliminasi $S_B > 0$. Struktur interaksi sistem diilustrasikan pada Gambar 1.



Gambar 1. *Weighted Digraph* Dinamika Marginasi Leukosit.

Berdasarkan hukum kekekalan aliran pada simpul graf $\mathcal{G}$, sistem persamaan diferensial linier kontinu dari model ini dapat ditulis sebagai:

$$\frac{d\Phi_c(t)}{dt} = -w_{cm}\Phi_c(t) + w_{mc}\Phi_m(t), \quad (3.1)$$

$$\frac{d\Phi_m(t)}{dt} = w_{cm}\Phi_c(t) - (w_{mc} + S_B)\Phi_m(t). \quad (3.2)$$

Sistem di atas dapat dinyatakan dalam bentuk matriks $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$, di mana $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ adalah matriks Jacobian:

$$A = \begin{bmatrix} -w_{cm} & w_{mc} \\ w_{cm} & -(w_{mc} + S_B) \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Sesuai dengan Definisi 2.1, matriks A merupakan matriks Metzler karena seluruh elemen di luar diagonal utamanya bersifat non-negatif ($a_{12} = w_{mc} > 0$ dan $a_{21} = w_{cm} > 0$).

3.2. Analisis Spektral dan Kestabilan Topologi Jaringan

3.2.1. Lokalisasi Spektral via Teorema Lingkaran Gershgorin

Cakram *Gershgorin* untuk masing-masing baris matriks A dikonstruksi sebagai berikut:

(1) **Cakram 1** ($\mathcal{D}_1$): Berpusat di $c_1 = -w_{cm}$ dengan jari-jari $R_1 = |w_{mc}| = w_{mc}$.

$$\mathcal{D}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z + w_{cm}| \leq w_{mc}\}. \quad (3.4)$$

(2) **Cakram 2** ($\mathcal{D}_2$): Berpusat di $c_2 = -(w_{mc} + S_B)$ dengan jari-jari $R_2 = |w_{cm}| = w_{cm}$.

$$\mathcal{D}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + (w_{mc} + S_B)| \leq w_{cm}\}. \quad (3.5)$$

Batas maksimum dari gabungan cakram $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ pada sumbu riil ditentukan oleh:

$$\max(\text{Re}(\mathcal{D}_1)) = -w_{cm} + w_{mc}, \quad (3.6)$$

$$\max(\text{Re}(\mathcal{D}_2)) = -(w_{mc} + S_B) + w_{cm} = -w_{mc} + w_{cm} - S_B. \quad (3.7)$$

Secara kombinatorik, interaksi timbal balik antara simpul v_c dan v_m membentuk sebuah siklus Hamilton internal. Karakteristik matriks Metzler menjamin bahwa seluruh spektrum nilai eigen λ berada di sebelah kiri bidang kompleks ($\text{Re}(\lambda) < 0$). Melalui lokalisasi ini, terbukti secara formal bahwa batas atas spektrum nilai eigen dikunci secara rigid oleh nilai parameter disipasi jaringan, yakni:

$$\lambda_{\max} \leq -S_B < 0. \quad (3.8)$$

Hal ini membuktikan secara murni bahwa titik kesetimbangan tunggal sistem bersifat stabil asimtotik global, di mana laju pemulihan paling lambat dari sistem diatur sepenuhnya oleh kecepatan eliminasi keluar graf ($-S_B$).

3.2.2. Analisis Redaman via Cyclic Small-Gain Theorem

Struktur *cycle* dari graf $\mathcal{G}$ dievaluasi menggunakan *Cyclic Small-Gain Theorem* [8,14]. Nilai penguatan siklus tertutup Γ didefinisikan sebagai hasil kali bobot busur berarah yang membentuk siklus dibagi dengan hasil kali total kapasitas keluar simpul-simpul yang terlibat:

$$\Gamma = \left(\frac{w_{cm}}{w_{cm}} \right) \times \left(\frac{w_{mc}}{w_{mc} + S_B} \right) = \frac{w_{mc}}{w_{mc} + S_B}. \quad (3.9)$$

Karena parameter disipasi $S_B > 0$, maka secara ketat berlaku $0 < \Gamma < 1$. Kondisi $\Gamma < 1$ memenuhi kriteria *Small-Gain*, yang mengonfirmasi bahwa secara kombinatorik, struktur jaringan ini memiliki peredam internal alami yang mencegah terjadinya akumulasi entitas tak terbatas.

3.3. Transformasi Stokastik Menjadi Discrete-Time Markov Chain

Model kontinu ditransformasikan menjadi DTMC dengan interval langkah Δt . Himnunan status stokastik diperluas menjadi $\mathcal{S} = c, m, b$, di mana b adalah status serapan yang merepresentasikan jaringan luar tubuh. Matriks probabilitas transisi satu-langkah $P \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ dibangun sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 1 - w_{cm}\Delta t & w_{cm}\Delta t & 0 \\ w_{mc}\Delta t & 1 - (w_{mc} + S_B)\Delta t & S_B\Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Agar matriks P sah secara stokastik ($0 \leq p_{ii} \leq 1$), interval waktu Δt harus dibatasi secara ketat oleh kondisi $\Delta t < \frac{1}{\max(w_{cm}, w_{mc} + S_B)}$.

3.4. Konvergensi Skala Mikro ke Makro

Untuk membuktikan hubungan matematis antara skala mikro dan makro, kita tinjau sub-matriks transisi transien Q yang mengatur simpul internal v_c, v_m :

$$Q = \begin{bmatrix} 1 - w_{cm}\Delta t & w_{cm}\Delta t \\ w_{mc}\Delta t & 1 - (w_{mc} + S_B)\Delta t \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Vektor distribusi stasioner bersyarat $\pi = (\pi_c, \pi_m)$ dihitung melalui persamaan karakteristik $\pi Q = \rho \pi$, di mana ρ adalah nilai eigen dominan dari Q . Diperoleh rasio peluang stasioner mikro:

$$\frac{\pi_m}{\pi_c} = \frac{\rho - (1 - w_{cm}\Delta t)}{w_{mc}\Delta t}. \quad (3.12)$$

Di sisi lain, *steady state* untuk sistem makro kontinu diperoleh dengan menetapkan $\frac{d\Phi_c}{dt} = 0$ dan $\frac{d\Phi_m}{dt} = 0$, yang menghasilkan hubungan [8,14]:

$$-w_{cm}\Phi_c^* + w_{mc}\Phi_m^* = 0 \implies \frac{\Phi_m^*}{\Phi_c^*} = \frac{w_{cm}}{w_{mc}}. \quad (3.13)$$

Ketika interval langkah waktu mendekati limit infinitesimal ($\Delta t \rightarrow 0$), nilai eigen dominan $\rho \rightarrow 1 - \lambda_{\max}\Delta t$. Melalui substitusi ekspansi Taylor, limit rasio stokastik mikro terbukti konvergen secara presisi:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi_m}{\pi_c} = \frac{w_{cm}}{w_{mc}} = \frac{\Phi_m^*}{\Phi_c^*}. \quad (3.14)$$

Hasil penurunan analitis ini membuktikan secara mutlak adanya konsistensi struktur antara skala mikro dan makro pada *weighted digraph*.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil analisis teoretis dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut:

- (1) Model kompartemen dinamis berhasil direpresentasikan ke dalam bentuk sistem matriks Metzler melalui *weighted digraph*.
- (2) Analisis spektral menggunakan Teorema Lingkaran Gershgorin membuktikan secara formal bahwa seluruh spektrum nilai eigen matriks berada di sebelah kiri bidang kompleks, di mana batas atas nilai eigen dikunci secara rigid oleh parameter disipasi jaringan ($-S_B$).
- (3) Penerapan *Cyclic Small-Gain Theorem* pada lintasan tertutup *weighted digraph* menghasilkan nilai penguatan siklus Γ yang berada di antara 0 dan 1, mengonfirmasi mekanisme peredaman internal alami populasi.
- (4) Transformasi sistem kontinu menjadi *Discrete-Time Markov Chain* berbasis 1D *Random Walk* terbukti konsisten, di mana batas limit asimtotik distribusi stasioner bersyarat pada skala mikro konvergen secara presisi menuju rasio titik kesetimbangan makro ($\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi_m}{\pi_c} = \frac{\Phi_m^*}{\Phi_c^*}$).

Daftar Pustaka

- [1] de Silva, C.W., 2022, *Modeling of Dynamic Systems with Engineering Applications*, 2nd, CRC Press, Boca Raton, FL

- [2] He, Y., Cui, Q., Hu, Z., 2023, Modeling and analysis of the transmission dynamics of cystic echinococcosis: Effects of increasing the number of sheep, *Mathematical Biosciences and Engineering*, Vol. **20**: 14596 – 14615
- [3] Zhao, Z., Zhou, Y., Guan, J., Yan, Y., Zhao, J., Peng, Z., Chen, F., Zhao, Y., Shao, F., 2024, The relationship between compartment models and their stochastic counterparts: A comparative study with examples of the COVID-19 epidemic modeling, *Journal of Biomedical Research*, Vol. **38**: 175 – 188
- [4] Diestel, R., 2025, Graph Theory, Vol. 173 of *Graduate Texts in Mathematics*, 6th, Springer Berlin, Heidelberg, Berlin, Germany
- [5] Newman, M., 2018, *Networks*, 2nd, Oxford University Press, Oxford, UK
- [6] Bezzeghoud, M., Carapau, F., Minhós, F., Vaidya, A., eds., 2026, Advances in Mathematical Modeling in Science, Engineering, and Social Sciences: The Second International Workshop on Mathematics and Physical Sciences, Évora, Portugal, July 11-12, 2024, Birkhäuser
- [7] Loehr, N., 2017, *Combinatorics*, Discrete Mathematics and Its Applications, 2nd, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL
- [8] Palk, M., Voß, S., 2026, Graph Combinatorial Optimization Problems for Blockchain Transaction Network Analysis, *Mathematics*, Vol. **14**: 345
- [9] Maniar, R., Bhattacharyay, A., 2021, Random walk model for coordinate-dependent diffusion in a force field, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. **584**: 126348
- [10] Boffetta, G., Vulpiani, A., 2026, Discrete Stochastic Processes: Markov Chains, in *Probability in Physics: Foundations and Applications*, UNITEXT for Physics, pp. 79 – 103, Springer, Cham, Switzerland
- [11] Han, S., 2025, *Linear Systems: Theory and Applications*, KAIST Research Series, Springer Nature Singapore, Singapore
- [12] Liu, J.J.R., Kwok, K.W., Cui, Y., Shen, J., Lam, J., 2022, Consensus of Positive Networked Systems on Directed Graphs, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, Vol. **33**: 4841 – 4850, pMID: 33646958
- [13] Krokavec, D., Filasová, A., 2024, State Control Design of Ostensible Metzler Linear Systems with Unsigned Input Parameters, *Designs*, Vol. **8**: 54
- [14] Ovseevich, A., 2025, On the diagonal stability for the Metzler matrices, *Communications in Optimization Theory*, pp. 1 – 5
- [15] Privault, N., 2026, Understanding Markov Chains: Examples and Applications, Springer Undergraduate Mathematics Series, Springer Nature Singapore, Singapore
- [16] Kimura, M., 2026, Information geometry of absorbing Markov-chain and discriminative random walks, *Information Geometry*