Jurnal Matematika UNAND
Vol. **15** No. **4** Hal. 466 – 480
Edisi Oktober 2026
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410
©Departemen Matematika dan Sains Data FMIPA UNAND
https://doi.org/10.25077/jmua.15.4.466-480.2026

# OPTIMIZATION MODELING OF BIOGAS PRODUCTION PERFORMANCE FROM COW MANURE AND SUGARCANE TOPS USING THE GAUSS-NEWTON METHOD (PEMODELAN OPTIMASI KINERJA PRODUKSI BIOGAS DARI KOTORAN SAPI DAN PUCUK TEBU MENGGUNAKAN METODE GAUSS-NEWTON)

SUSILA BAHRI*, CHRIST SAMUEL TOBING

*Departemen Matematika dan Sains Data,*
*FMIPA Universitas Andalas,*
*Kampus UNAND Limau Manis Padang 25163*
*email : susilabahri@sci.unand.ac.id, chrissamueltobing@gmail.com,*

Diajukan 4 Juli 2026 Direvisi 11 September 2026
Diterima 25 September 2026 Diterbitkan 22 Oktober 2026

**Abstrak**. Penelitian ini memodelkan kinetika produksi biogas campuran kotoran sapi dan pucuk tebu menggunakan Model Gompertz Termodifikasi untuk mengestimasi potensi, laju, dan durasi fase produksi biogas. Parameter-parameter model tersebut diestimasi menggunakan metode kuadrat terkecil dan iterasi numerik Gauss-Newton. Dengan mengaplikasikan data produksi biogas kumulatif campuran kotoran sapi dan limbah pucuk tebu dengan jenis perlakuan kontrol, C/N 20, C/N 30, dan C/N 40 pada metode Gauss-Newton diperoleh ketiga nilai parameter kinerja tersebut untuk masing-masing perlakuan. Nilai parameter $R^2$ dan RMSE terbaik dihasilkan pada perlakuan kontrol dengan $R^2 = 0,9994$ dan RMSE $= 352,8769$.

*Kata Kunci*: Biogas, Fermentasi anaerob, Gauss-Newton, Model Gompertz Termodifikasi

**Abstract**. *This study models the biogas production kinetics of a mixture of cow manure and sugarcane tops using the Modified Gompertz Model to estimate the potential, rate, and lag phase duration of biogas production. The model parameters were estimated using the least squares method and the Gauss-Newton numerical iteration. By applying the cumulative biogas production data from the mixture under various treatments—namely control, C/N 20, C/N 30, and C/N 40—to the Gauss-Newton method, the three performance parameters for each treatment were successfully determined. The best parameter values were achieved by the control treatment, yielding an $R^2$ of 0.9994 and a Root Mean Square Error (RMSE) of 352.8769.*

*Keywords*: Anaerobic fermentation, Biogas, Gauss-Newton, Modified Gompertz Model

*Penulis korespondensi

## 1. Pendahuluan

Biogas adalah energi terbarukan yang berasal dari sumber daya alam dalam bentuk gas yang sebagian besar tersusun dari metana ($CH_4$) dan karbon dioksida ($CO_2$), yang terbentuk dari proses penguraian bahan organik oleh mikroorganisme dalam kondisi tanpa oksigen (fermentasi anaerob) [1,2]. Biogas sering digunakan sebagai bahan bakar alternatif untuk menghasilkan panas, listrik, maupun bahan bakar kendaraan, dan residu hasil fermentasinya yang mengandung nutrien digunakan sebagai pupuk organik bagi tanaman dan pembenah tanah [3,4].

Kinerja fermentasi anaerob pada produksi biogas merupakan gambaran keberhasilan proses penguraian bahan organik oleh mikroorganisme dalam kondisi tanpa oksigen untuk menghasilkan biogas [5]. Kinerja ini dapat dinilai melalui beberapa parameter, seperti jumlah potensi biogas tertinggi yang dihasilkan (potensi produksi biogas maksimum), kecepatan peningkatan volume biogas yang dihasilkan (laju produksi biogas), dan lama waktu yang dibutuhkan mikroorganisme sebelum produksi biogas meningkat (durasi fase adaptasi) [5,6,7]. Semakin tinggi laju dan potensi produksi biogas serta semakin singkat fase adaptasi, maka proses fermentasi anaerob dapat dikatakan semakin efektif [8,9].

Beberapa studi telah dilakukan untuk mengevaluasi kinerja fermentasi anaerob. Salah satunya adalah penelitian oleh [6] yang menerapkan Model Gompertz Termodifikasi, sedangkan [7] menentukan parameter kinerja fermentasi melalui kurva regresi nonlinier. Dalam estimasi parameter model nonlinier, metode Gauss-Newton merupakan metode iteratif yang menyelesaikan permasalahan kuadrat terkecil nonlinier melalui linearisasi model menggunakan matriks Jacobian [10,11]. Metode ini dipilih karena sesuai dengan tujuan estimasi parameter Model Gompertz Termodifikasi yang melibatkan tiga parameter nonlinier, yaitu potensi maksimum, laju produksi, dan durasi fase adaptasi. Di sisi lain, penelitian [12] hanya berfokus pada perhitungan laju produksi biogas tanpa menggunakan model Gompertz, padahal data yang digunakan dapat dimanfaatkan untuk memperoleh parameter kinerja produksi lainnya.

Berdasarkan keterbatasan studi-studi terdahulu, penelitian ini mengoptimalkan analisis data dari penelitian [12] dengan menerapkan metode Gaus–Newton untuk mengestimasi parameter Model Gompertz Termodifikasi. Kotoran sapi dan pucuk tebu dipilih karena keduanya merupakan bahan organik dari sektor peternakan dan pertanian yang dapat dimanfaatkan sebagai substrat fermentasi anaerob, serta kombinasi keduanya memungkinkan pengkajian kinerja produksi biogas pada variasi rasio C/N [12]. Kontribusi penelitian ini adalah memberikan penjabaran komputasi Gauss-Newton secara rinci dalam menentukan potensi maksimum, laju produksi, dan durasi fase adaptasi biogas, sehingga pemanfaatan data penelitian [12] dapat menghasilkan gambaran kinerja fermentasi yang lebih komprehensif.

## 2. Landasan Teori

### 2.1. *Pemodelan Kinetika Produksi Biogas*

Kinetika produksi biogas kumulatif pada proses fermentasi anaerob dapat dimodelkan menggunakan Model Gompertz Termodifikasi. Model berbentuk kurva

sigmoid ini dapat digunakan untuk mengukur tiga parameter kinerja fermentasi anaerob yaitu laju produksi, potensi, serta durasi fase produksi biogas. Model tersebut adalah [13]:

$$P = f(t, A, R_m, \lambda) = A \cdot \exp\left\{-\exp\left[\frac{R_m \cdot e}{A}(\lambda - t) + 1\right]\right\}, \tag{2.1}$$

di mana $P$ adalah total produksi biogas kumulatif (ml), $A$ adalah potensi produksi biogas maksimum (ml), $R_{\mathrm{m}}$ adalah laju produksi biogas maksimum (ml/hari), $\lambda$ adalah durasi fase adaptasi (hari), dan $t$ adalah durasi pengujian saat produksi biogas kumulatif $P$ dihitung (hari). Parameter $A$, $\lambda$, dan $R_{\mathrm{m}}$ diestimasi untuk masing-masing kumpulan data eksperimen yang tercantum pada Tabel 1 dengan menerapkan pencocokan kuadrat terkecil (*least squares fit*) terhadap model (2.1) dan menggunakan metode iterasi Gauss-Newton untuk meminimalkan nilai galat (*error*) antara data pengamatan dan model prediksi, sehingga diperoleh nilai setiap parameter tersebut.

### 2.2. *Kuadrat Terkecil pada Masalah Regresi Nonlinier*

Misalkan terdapat $n$ buah titik data pengamatan $(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Anggap himpunan titik data tersebut akan dicocokkan (*curve fitting*) dengan model regresi nonlinier berikut.

$$y_i = f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}) + r_i, \tag{2.2}$$

dimana $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{iq})^T$ vektor variabel bebas berukuran $q \times 1$ , $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p)^T$ vektor parameter nonlinier berukuran $p \times 1$, dan $r_i = r_i(\boldsymbol{\beta})$ adalah suku galat [14].

Estimasi kuadrat terkecil (*Least-Squares*) yang bertujuan untuk mendapatkan nilai parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ dengan jumlah kuadrat galat (*Sum of Squared Errors*) minimum dapat diungkapkan dengan:

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})]^2 = \sum_{i=1}^{n} [r_i(\boldsymbol{\beta})]^2.$$

Untuk memperoleh nilai minimum $S(\boldsymbol{\beta})$, lakukan turunan fungsi tersebut terhadap masing-masing parameter $\beta_j$, $j = 0, 1, \cdots, p-1$ dan menyamakan hasilnya dengan nol.

$$\frac{\partial S(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = 0, \tag{2.3}$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})] \frac{\partial f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = 0, \tag{2.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})] \frac{\partial f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = 0. \tag{2.5}$$

Bentuk terakhir ini menghasilkan $p$ persamaan.

Definisikan matriks Jacobian:

$$\mathbf{J} = [J_{ij}] \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x}_1,\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f(\mathbf{x}_1,\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{x}_1,\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_p}, \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}_2,\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f(\mathbf{x}_2,\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{x}_2,\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_p}, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_1} & \frac{\partial f(\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_2} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{x}_n,\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_p} \end{bmatrix},$$

dan pandang matriks:

$$\mathbf{y} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} y_1 - f(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\beta}) \\ y_2 - f(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\beta}) \\ \vdots \\ y_n - f(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\beta}) \end{bmatrix},$$

maka dapat diperoleh dari persamaan (2.6), yakni disebut persamaan normal:

$$\mathbf{J}^T [\mathbf{y} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})] = 0. \tag{2.6}$$

Berbeda dengan regresi linier, persamaan normal ini seringkali tidak memiliki solusi analitik karena $\mathbf{f}(\boldsymbol{\beta})$ bersifat nonlinier. Oleh karena itu, harus digunakan metode iteratif numerik untuk menyelesaikan persamaan normal (2.6). Pada penelitian ini metode yang digunakan adalah metode Gauss-Newton.

### 2.3. *Metode Gauss-Newton*

Metode Gauss-Newton dimulai dengan menetapkan nilai tebakan awal (*initial guess*) untuk vektor parameter. Misalkan nilai tebakan awal $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ adalah suatu nilai hampiran untuk parameter nonlinier *least squares* $\hat{\boldsymbol{\beta}}$. Tinjau $\boldsymbol{\beta}$ yang dekat dengan $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$, maka ekspansi deret Taylor orde pertama untuk fungsi nonlinier $f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})$ adalah:

$$f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}) \approx f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}^{(0)}) + \sum_{j=1}^{p} \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} \right|_{\boldsymbol{\beta}^{(0)}} (\beta_j - \beta_j^{(0)}). \tag{2.7}$$

Definisikan $\Delta\beta_j^{(0)} = \beta_j - \beta_j^{(0)}$. Persamaan (2.7) dapat ditulis menjadi:

$$f_i(\boldsymbol{\beta}) \approx f_i(\boldsymbol{\beta}^{(0)}) + \sum_{j=1}^{p} J_{ij}^{(0)} \Delta\beta_j^{(0)}, \tag{2.8}$$

dimana:

$$J_{ij} = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} \right|_{\beta=\beta^{(0)}}.$$

Persamaan (2.2) dapat diaproksimasi menggunakan (2.8) sebagai berikut.

$$y_i \approx f_i(\boldsymbol{\beta}^{(0)}) + \sum_{j=1}^{p} J_{ij}^{(0)} \Delta\beta_j^{(0)} + r_i,$$

dan dengan melakukan pengurangan suku $f_i(\beta^{(0)})$ pada kedua ruas dan menotasikan $y_i - f_i(\boldsymbol{\beta}^{(0)})$ sebagai $y_i^{(0)}$, diperoleh hampiran model regresi linier:

$$\mathbf{y}_i^{(0)} \approx \sum_{j=1}^{p} J_{ij}^{(0)} \Delta\beta_j^{(0)} + r_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{2.9}$$

Dalam notasi matriks, hampiran model regresi linier dapat dituliskan sebagai berikut.

$$y^{(0)} \approx \mathbf{J}^{(0)} \Delta\boldsymbol{\beta}^{(0)} + \mathbf{r}, \tag{2.10}$$

dimana:

$$\underbrace{\mathbf{y}^{(0)}}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} y_1 - f_1(\boldsymbol{\beta}^{(0)}) \\ \vdots \\ y_n - f_n(\boldsymbol{\beta}^{(0)}) \end{bmatrix},$$

$$\underbrace{J^{(0)}}_{n\times p} = \begin{bmatrix} J_{11}^{(0)} & \cdots & J_{1p}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n1}^{(0)} & \cdots & J_{np}^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$\underbrace{\Delta\boldsymbol{\beta}^{(0)}}_{p\times 1} = \begin{bmatrix} \Delta\beta_1^{(0)} \\ \vdots \\ \Delta\beta_p^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 - \beta_1^{(0)} \\ \vdots \\ \beta_p - \beta_p^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$\underbrace{\mathbf{r}}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}.$$

Perhatikan model regresi linier pada [14] yang dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut.

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{r}, \tag{2.11}$$

dimana:

$$\underbrace{\mathbf{y}}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \underbrace{\mathbf{x}}_{n\times p} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1,p-1} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2,p-1} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{n,p-1} \end{bmatrix},$$

$$\underbrace{\boldsymbol{\beta}}_{p\times 1} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_p \end{bmatrix}.$$

Persamaan normal dengan proses kuadrat terkecil (*least squares*) dari model regresi (2.11) adalah:

$$(\mathbf{x}^T\mathbf{x})\mathbf{b} = \mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{y},$$

dengan $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_p)^T$ adalah nilai hampiran untuk $\beta$ yang dapat dihitung melalui:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{x}^{\mathbf{T}}\mathbf{x})^{-1}\,\mathbf{x}^T\mathbf{y}.$$

Perhatikan model hampiran (2.10) memiliki bentuk regresi linier (2.11), sehingga dapat dihitung vektor hampiran parameter $\Delta\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ dengan:

$$\Delta\boldsymbol{\beta}^{(0)} = ((\mathbf{J}^{(0)})^T\,\mathbf{J}^{(0)})^{-1}\,(\mathbf{J}^{(0)})^T\,\mathbf{y}^{(0)}, \tag{2.12}$$

dengan demikian $\Delta\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ akan meminimalkan jumlah kuadrat galat:

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - f_i(\boldsymbol{\beta}^{(0)}) - \sum_{j=1}^{p} J_{ij}^{(0)}\Delta\beta_j^{(0)}\right]^2.$$

Hasil $\Delta\beta_j$ yang diperoleh dari persamaan di atas, dan menggunakan $\Delta\beta_j^{(0)} = \beta_j - \beta_j^{(0)}$, maka dapat diperoleh hubungan:

$$\beta_j^{(1)} = \beta_j^{(0)} + \Delta\beta_j^{(0)}, \tag{2.13}$$

dimana $\beta_j^{(1)}$ adalah hampiran $\beta_j$ yang diperoleh dengan memperbarui nilai melalui persamaan di atas pada akhir iterasi pertama.

Secara umum, dalam bentuk matriks dari proses memperbarui nilai $\beta_j$ dalam setiap pengulangan iterasi dinyatakan dalam hubungan berikut

$$\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(k)} + \Delta\boldsymbol{\beta}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \cdots, \tag{2.14}$$

dengan

$$\Delta\boldsymbol{\beta}^{(k)} = ((\mathbf{J}^{(k)})^T\,\mathbf{J}^{(k)})^{-1}\,(\mathbf{J}^{(k)})^T\,\mathbf{y}^{(k)}. \tag{2.15}$$

Proses iterasi dilanjutkan hingga diperoleh solusi konvergen. Proses berhenti ketika

$$\|\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\beta}^{(k)}\|_2 < \tau \tag{2.16}$$

untuk suatu bilangan kecil positif $\tau$ yang ditentukan [15].

## 3. Hasil dan Pembahasan

### 3.1. *Data Eksperimental Produksi Biogas*

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan data sekunder yang bersumber dari eksperimen [12]. Eksperimen [12] tersebut mengukur laju produksi biogas harian (ml/hari) yang dihasilkan dari proses fermentasi campuran kotoran sapi dan limbah pucuk tebu (Saccharum officinarum L) selama 21 hari dengan berbagai variasi rasio C/N. Variasi rasio yang digunakan meliputi kotoran sapi murni sebagai kontrol, serta campuran dengan rasio C/N 20, C/N 30, dan C/N 40.

Pemodelan kinetika produksi biogas menggunakan Model Gompertz Termodifikasi memerlukan data observasi berupa total produksi biogas kumulatif, $P$, seiring berjalannya waktu $t$. Karena data pengamatan asli menyajikan laju volume gas harian secara diskrit, maka data tersebut perlu diakumulasikan. Nilai produksi biogas kumulatif pada hari ke-$t$, yang dinotasikan dengan $P_t$, dihitung dengan menjumlahkan produksi gas pada hari tersebut dengan total produksi pada hari-hari sebelumnya, menggunakan persamaan berikut:

$$P_t = \sum_{i=1}^{t} V_i$$

di mana $V_i$ adalah laju produksi biogas harian (ml/hari) pada hari ke-$i$. Berdasarkan konversi tersebut, diperoleh himpunan data kumulatif yang representatif untuk mengamati fase pertumbuhan eksponensial dan fase stasioner dari produksi biogas. Hasil perhitungan akumulasi volume biogas untuk keempat perlakuan disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1. Produksi Biogas Kumulatif (mL)

| **Hari ke- ($t$)** | **Kontrol** | **C/N 20** | **C/N 30** | **C/N 40** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1203,33 | 13733,3 | 10666,7 |
| 2 | 0 | 3236,66 | 36458,3 | 32536,7 |
| 3 | 0 | 6261,66 | 63725 | 62753,4 |
| 4 | 0 | 9959,99 | 94080 | 98970,1 |
| 5 | 650 | 14198,32 | 125978,3 | 136693,4 |
| 6 | 1650 | 19069,99 | 158143,3 | 175669,1 |
| 7 | 2900 | 24308,32 | 190358,3 | 215344,8 |
| 8 | 4450 | 29846,65 | 222573,3 | 255440,5 |
| 9 | 6300 | 35584,98 | 254788,3 | 295602,8 |
| 10 | 8400 | 41423,31 | 287003,3 | 335798,5 |
| 11 | 10700 | 47361,64 | 319218,3 | 376004,2 |
| 12 | 13300 | 53416,64 | 351433,3 | 416209,9 |
| 13 | 16050 | 59571,64 | 383648,3 | 456415,6 |
| 14 | 19100 | 65793,31 | 415863,3 | 496621,3 |
| 15 | 22450 | 72081,64 | 448078,3 | 536827 |
| 16 | 25950 | 78369,97 | 480293,3 | 577032,7 |
| 17 | 29600 | 84658,3 | 512508,3 | 617238,4 |
| 18 | 33400 | 90946,63 | 544723,3 | 657444,1 |
| 19 | 37350 | 97234,96 | 576938,3 | 697649,8 |
| 20 | 41350 | 103523,29 | 609153,3 | 737855,5 |
| 21 | 45360 | 109811,62 | 641368,3 | 778061,2 |

### 3.2. *Penerapan Metode Gauss-Newton*

Dengan menggunakan data Tabel 1, dan model Gompertz termodifikasi pada (2.1) akan ditentukan nilai tiga parameter yakni $\boldsymbol{\beta} = [A, R_m, \lambda]^T$. Berikut diberikan contoh penerapan langkah iterasi yang telah dijelaskan pada bagian sebelumnya. Misalkan digunakan data kontrol dari Tabel 1.

Selanjutnya, dipilih nilai tebakan awal sesuai data kontrol untuk parameter:

$$A^{(0)} = 46000, R_m^{(0)} = 3000, \lambda^{(0)} = 4,$$

sehingga diperoleh:

$$\boldsymbol{\beta}^{(0)} = [46000, 3000, 4]^T.$$

Selanjutnya dihitung residual dengan rumus:

$$r_i(\boldsymbol{\beta}) = P_i - f(t_i, \boldsymbol{\beta}),$$

diperoleh:

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \text{-450, -955, -1792, -3035, -4071, -5183, -6415, -7624, -8704, -9599, -10263,} \\ \text{-10518, -10456, -9889, -8797, -7323, -5471, -3251, -679, 2127, 5108} \end{bmatrix}^T.$$

Selanjutnya dibentuk matriks $\mathbf{J}$, dimana:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(t_1,\boldsymbol{\beta})}{\partial A} & \frac{\partial f(t_1,\boldsymbol{\beta})}{\partial R_m} & \frac{\partial f(t_1,\boldsymbol{\beta})}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial f(t_2,\boldsymbol{\beta})}{\partial A} & \frac{\partial f(t_2,\boldsymbol{\beta})}{\partial R_m} & \frac{\partial f(t_2,\boldsymbol{\beta})}{\partial \lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f(t_{21},\boldsymbol{\beta})}{\partial A} & \frac{\partial f(t_{21},\boldsymbol{\beta})}{\partial R_m} & \frac{\partial f(t_{21},\boldsymbol{\beta})}{\partial \lambda} \end{bmatrix},$$

dengan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t_i,\boldsymbol{\beta})}{\partial A} &= \exp\left(-\exp\left(\frac{R_m \cdot e}{A}(\lambda - t_i) + 1\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{A}\left(R_m \cdot e \cdot (\lambda - t_i) \cdot \exp\left(\frac{R_m \cdot e}{A}(\lambda - t_i) + 1\right) \cdot \exp\left(-\exp\left(\frac{R_m \cdot e}{A}(\lambda - t_i) + 1\right)\right)\right), \\ \frac{\partial f(t_i,\boldsymbol{\beta})}{\partial R_m} &= -e \cdot (\lambda - t_i) \cdot \exp\left(\frac{R_m \cdot e}{A}(\lambda - t_i) + 1\right) \cdot \exp\left(-\exp\left(\frac{R_m \cdot e}{A}(\lambda - t_i) + 1\right)\right), \\ \frac{\partial f(t_i,\boldsymbol{\beta})}{\partial \lambda} &= -R_m \cdot e \cdot \exp\left(\frac{R_m \cdot e}{A}(\lambda - t_i) + 1\right) \cdot \exp\left(-\exp\left(\frac{R_m \cdot e}{A}(\lambda - t_i) + 1\right)\right). \end{aligned}$$

Dapat diperoleh matriks Jacobian:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & -0,4 & -369,3 \\ 0 & -0,4 & -655,8 \\ 0,1 & -0,3 & -1030,8 \\ 0,1 & 0 & -1462,8 \\ 0,1 & 0,6 & -1905,3 \\ 0 & 1,5 & -2309,9 \\ 0 & 2,6 & -2637,2 \\ 0 & 3,8 & -2863 \\ 0 & 5 & -2980 \\ 0 & 6 & -2994,1 \\ 0 & 6,8 & -2920,6 \\ 0 & 7,4 & -2779,2 \\ 0,1 & 7,8 & -2590,4 \\ 0,1 & 7,9 & -2372,9 \\ 0,2 & 7,9 & -2142,2 \\ 0,2 & 7,6 & -1910,5 \\ 0,3 & 7,3 & -1686,6 \\ 0,3 & 6,9 & -1476,2 \\ 0,4 & 6,4 & -1282,9 \\ 0,5 & 5,9 & -1108,2 \\ 0,5 & 5,4 & -952,5 \end{bmatrix}.$$

Hitung $\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J}$ dan $\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4000 \\ 0 & 1000 & -208000 \\ -4000 & -208000 & 91370000 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} -10000 \\ -620000 \\ 270500000 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya hitung $(\boldsymbol{J}^T\boldsymbol{J})\Delta\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{J}^T\boldsymbol{r}$. Proses ini dihitung dengan menggunakan eliminasi Gauss, dan diperoleh:

$$\Delta\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 17677 \\ -817 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Misalkan batas toleransi $\tau = 10^{-6}$. Hitung $\|\Delta\boldsymbol{\beta}\|_2 = \sqrt{17677^2 + (-817)^2 + 2^2} = 17696$. Jelas bahwa $\|\Delta\boldsymbol{\beta}\|_2 > \tau$. Hitung $\boldsymbol{\beta}^{(1)} = \boldsymbol{\beta}^{(0)} + \Delta\boldsymbol{\beta}$:

$$\boldsymbol{\beta}^{(1)} = \begin{bmatrix} 46000 \\ 3000 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 17677 \\ -817 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63677 \\ 2183 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Proses diulang hingga memenuhi $\|\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\beta}^{(k)}\|_2 < \tau$. Untuk mempermudah proses iterasi Gauss-Newton, digunakan *software* MATLAB dalam setiap proses komputasi untuk setiap data kumulatif rata-rata volume.

### 3.3. *Hasil Estimasi Parameter dan Validasi Model*

Penyelesaian persamaan normal pada Metode Gauss-Newton dilakukan secara komputasi, untuk keempat variasi perlakuan. Iterasi numerik dijalankan dengan menetapkan nilai toleransi konvergensi sebesar $\tau = 10^{-6}$. Proses iterasi dihentikan ketika galat parameter $||\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} - \boldsymbol{\beta}^{(k)}||_2 < \tau$. Hasil estimasi untuk ketiga parameter kinerja produksi biogas pada Model Gompertz Termodifikasi, yaitu potensi produksi biogas maksimum ($A$), laju produksi maksimum ($R_m$), dan durasi fase adaptasi ($\lambda$), dirangkum pada Tabel 2 dengan menggunakan program yang diungkapkan dalam bentuk *pseudocode* sebagaimana yang dilampirkan pada Lampiran.

Tabel 2. Rekapitulasi parameter, model Gompertz Termodifikasi,$R^2$ dan RMSE

| **Perlakuan** | **Parameter** | **Model Gompertz Termodifikasi** | $R^2$ | **NRMSE** |
|---|---|---|---|---|
| Kontrol | $A = 95039,6001$<br>$R_m = 3805,9486$<br>$\lambda = 9,1480$ | $P = 95039,6001 \cdot \exp\left\{-\exp\left[\frac{3805,9486 \cdot e}{95039,6001}(9,1480 - t) + 1\right]\right\}$ | 0,9994 | 0,78% |
| C/N 20 | $A = 162906,9922$<br>$R_m = 6661,8800$<br>$\lambda = 4,0098$ | $P = 162906,9922 \cdot \exp\left\{-\exp\left[\frac{6661,8800 \cdot e}{162906,9922}(4,0098 - t) + 1\right]\right\}$ | 0,9988 | 1,10% |
| C/N 30 | $A = 869103,9882$<br>$R_m = 36024,7220$<br>$\lambda = 2,1968$ | $P = 869103,9882 \cdot \exp\left\{-\exp\left[\frac{36024,7220 \cdot e}{869103,9882}(2,1968 - t) + 1\right]\right\}$ | 0,9973 | 1,60% |
| C/N 40 | $A = 1053645,8206$<br>$R_m = 44928,7334$<br>$\lambda = 2,7098$ | $P = 1053645,8206 \cdot \exp\left\{-\exp\left[\frac{44928,7334 \cdot e}{1053645,8206}(2,7098 - t) + 1\right]\right\}$ | 0,9974 | 1,58% |

Untuk mengevaluasi tingkat akurasi dan kesesuaian model Gompertz Termodifikasi terhadap data eksperimen, dilakukan analisis statistik menggunakan nilai parameter *Normalized Root Mean Square Error* (NRMSE) dan Koefisien Determinasi ($R^2$) dengan menggunakan formula berikut [14].

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{21}\sum_{i=1}^{21}(P(t_i) - f_{\text{prediksi}}(t_i, \boldsymbol{\beta}))^2}\,,$$

$$NRMSE = \frac{RMSE}{P_{max} - P_{min}} \times 100\%, \tag{3.1}$$

dan:

$$R^2 = 1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{21}(P(t_i) - f_{\text{prediksi}}(t_i, \boldsymbol{\beta}))^2}{\sum_{i=1}^{21}\left(P(t_i) - \frac{\sum_{i=1}^{21} P(t_i)}{21}\right)^2}\right). \tag{3.2}$$

Secara teori, nilai NRMSE yang kurang dari 10% mengindikasikan bahwa tingkat kesalahan prediksi adalah rendah, sedangkan nilai $R^2$ yang mendekati 1 menunjukkan

bahwa model mampu merepresentasikan variabilitas data pengamatan dengan sangat baik [16,17].

Nilai-nilai parameter pada Tabel 2 merupakan nilai optimal yang meminimumkan jumlah kuadrat galat antara data eksperimental kumulatif dan kurva prediksi. Berdasarkan hasil komputasi pada tabel tersebut, terlihat bahwa seluruh perlakuan menghasilkan nilai $R^2$ mendekati 1. Hal ini membuktikan bahwa formulasi fungsi nonlinier dari model Gompertz Termodifikasi sangat representatif dalam memodelkan kinetika produksi biogas kumulatif.

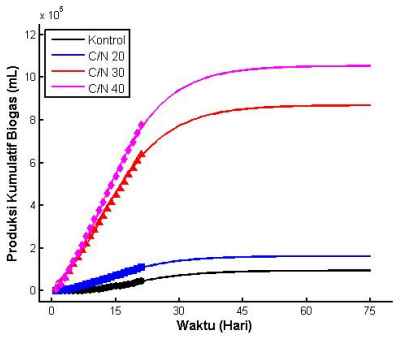
### 3.4. *Analisis Visualisasi*

Visualisasi hasil *fitting* kurva model Gompertz Termodifikasi terhadap data eksperimen disajikan pada Gambar 1. Kurva garis merepresentasikan hasil prediksi model, sedangkan simbol titik merepresentasikan data eksperimen. Gambar tersebut menunjukkan hubungan antara waktu fermentasi dan produksi kumulatif biogas untuk beberapa perlakuan karbon dan nitrogen yaitu kontrol, C/N 20, C/N 30, dan C/N 40. Secara matematis, hubungan tersebut dapat dinyatakan sebagai $P = f(t)$, dengan $P$ adalah produksi kumulatif biogas dalam mL, $t$ waktu fermentasi dalam hari, dan $f(t)$ adalah fungsi pertumbuhan biogas terhadap waktu. Skala pada sumbu vertikal menggunakan pengali $10^5$ atau setara 100.000 mL.

Keempat kurva memperlihatkan pola pertumbuhan yang mendekati bentuk sigmoid. Pada awal proses karena mikroorganisme sedang beradaptasi dengan kondisi lingkungan maka produksi biogas masih rendah, sehingga laju produksi biogas masih kecil ($\frac{dP}{dt} \approx 0$). Fase adaptasi ini terlihat paling jelas pada perlakuan kontrol, sedangkan pada perlakuan C/N 20, C/N 30, dan C/N 40 fase adaptasi lebih singkat. Setelah mikroorganisme beradaptasi produksi biogas meningkat dengan cepat sebagaimana terlihat pada kurva yang memiliki kemiringan tajam, sehingga laju produksi biogas per satuan waktu semakin besar ($\frac{dP}{dt} > 0$). Urutan laju produksi berdasarkan kemiringan kurva adalah C/N 40 > C/N 30 > C/N 20 > kontrol. Ini berarti C/N 40 menghasilkan biogas paling cepat terutama pada sekitar 5 hingga 25 hari pertama. Setelah sebagian substrat terdegradasi, peningkatan produksi biogas mulai melambat. Kurva kemudian mendatar atau membentuk plateau. Secara matematis $\lim_{t\to\infty} \frac{dP}{dt} = 0$ yang berarti dengan bertambahnya waktu, tambahan produksi biogas menjadi sangat kecil atau hampir tidak ada.

## 4. Kesimpulan

Melalui minimisasi jumlah kuadrat galat, metode Gauss-Newton dapat digunakan untuk mendapatkan parameter-parameter kinerja fermentasi anaerob terbaik; potensi, laju, serta durasi fase produksi biogas, sehingga model menjadi sedekat mungkin dengan data eksperimen. Kemudian dari hasil konstruksi model nonlinier Gompertz Termodifikasi untuk data produksi biogas kumulatif campuran kotoran sapi dan limbah pucuk tebu tersebut, dengan jenis perlakuan kontrol, C/N 20, C/N 30, dan C/N 40 diperoleh bahwa perlakuan C/N 40 merupakan komposisi yang paling efektif, menghasilkan potensi produksi biogas maksimum tertinggi sebesar 1.053.645,82 mL dan laju produksi maksimum tercepat sebesar 44.928,73




Gambar 1. Perbandingan antara data (simbol) dan model Gompertz dimodifikasi (garis utuh).

mL/hari. Selain itu, berdasarkan nilai $R^2$ yang mendekati satu serta nilai NRMSE yang berada di bawah 2% pada seluruh variasi, maka model Gompertz Termodifikasi terbukti memiliki tingkat kesesuaian dan akurasi yang sama baiknya untuk semua perlakuan.

## 5. Lampiran

**Algoritma 1. Alur Ringkas Fitting Model Gompertz Termodifikasi**

```
MULAI
    Masukkan data produksi kumulatif
    Tentukan model Gompertz
    Tentukan tebakan awal A, Rm, dan lambda

    UNTUK setiap kelompok data
        Hitung prediksi model
        Hitung residu
        Hitung matriks Jacobian
        Hitung koreksi parameter dengan Gauss-Newton
        Perbarui parameter
        Ulangi sampai konvergen atau iterasi maksimum
        Simpan parameter optimal
    AKHIR UNTUK

    UNTUK setiap kelompok data
        Hitung prediksi akhir
        Hitung R-squared
        Hitung RMSE
    AKHIR UNTUK

    Tampilkan tabel parameter dan validasi model
    Gambarkan data eksperimen dan kurva Gompertz
SELESAI
```

**Algoritma 2. Rincian Komputasi dan Iterasi Gauss-Newton**

```
DEKLARASI:
    t                   : array waktu
    P_all               : matriks data produksi kumulatif
    labels              : array string jenis perlakuan
    beta_guess_all      : matriks tebakan awal [A, Rm, lambda]
    beta_results        : matriks hasil parameter optimal
    stats_results       : matriks hasil statistik (R^2, RMSE)
    toleransi           : batas konvergensi (10^-6)
    maksimum_iterasi    : batas maksimum perulangan (100)

DESKRIPSI:
    // TAHAP 1: PERSIAPAN MODEL DAN JACOBIAN
    DEFINISIKAN MODEL_GOMPERTZ(t, A, Rm, lambda)
        hasil <- A * EXP(-EXP(((Rm * e) / A) * (lambda - t) + 1))
        KEMBALIKAN hasil

    DEFINISIKAN JACOBIAN_GOMPERTZ(t, A, Rm, lambda)
        J <- [dP/dA, dP/dRm, dP/dlambda]
        KEMBALIKAN J

    // TAHAP 2: INISIALISASI DATA
    t <- [1, 2, ..., 21]
    P_all <- GABUNGKAN_KOLOM(KumulatifKontrol, KumulatifCN20,
                             KumulatifCN30, KumulatifCN40)
    beta_results <- MATRIKS_NOL(3, 4)

    // TAHAP 3: OPTIMASI PARAMETER (METODE GAUSS-NEWTON)
    UNTUK kolom <- 1 SAMPAI 4 LAKUKAN
        P_exp <- P_all[:, kolom]
        beta_k <- beta_guess_all[:, kolom]
        iterasi <- 0
        norm_delta <- tak hingga

        SELAMA (iterasi < maksimum_iterasi)
               DAN (norm_delta > toleransi) LAKUKAN

            iterasi <- iterasi + 1
            A, Rm, lambda <- beta_k

            P_pred <- MODEL_GOMPERTZ(t, A, Rm, lambda)
            residual <- P_exp - P_pred
            J <- JACOBIAN_GOMPERTZ(t, A, Rm, lambda)
```

```
        JTJ <- TRANSPOSE(J) * J
        JTr <- TRANSPOSE(J) * residual

        Selesaikan: (JTJ) * delta_beta = JTr
        beta_k <- beta_k + delta_beta
        norm_delta <- NORMA_EUCLIDEAN(delta_beta)
    AKHIR SELAMA

    beta_results[:, kolom] <- beta_k
AKHIR UNTUK

// TAHAP 4: VALIDASI STATISTIK
stats_results <- MATRIKS_NOL(2, 4)
UNTUK kolom <- 1 SAMPAI 4 LAKUKAN
    P_exp <- P_all[:, kolom]
    A_opt, Rm_opt, lambda_opt <- beta_results[:, kolom]

    P_pred_opt <- MODEL_GOMPERTZ(t, A_opt, Rm_opt, lambda_opt)
    SS_res <- JUMLAH((P_exp - P_pred_opt)^2)
    SS_tot <- JUMLAH((P_exp - RATA_RATA(P_exp))^2)

    RMSE <- AKAR(RATA_RATA((P_exp - P_pred_opt)^2))
    R2 <- 1 - (SS_res / SS_tot)

    stats_results[1, kolom] <- R2
    stats_results[2, kolom] <- RMSE
AKHIR UNTUK

// TAHAP 5 & 6: REKAPITULASI DAN VISUALISASI
TAMPILKAN tabel beta_results dan stats_results
PLOT data aktual (P_all) sebagai titik
PLOT data prediksi dengan t_smooth sebagai garis kurva
```

## Daftar Pustaka


[1] Jameel, M.K., Mustafa, M.A., Ahmed, H., Mohammed, A., Ghazy, H., Shakir, M.N., Lawas, A.M., khudhur Mohammed, S., Idan, A.H., Mahmoud, Z.H., Sayadi, H., Kianfar, E., 2024, Biogas: Production, properties, applications, economic and challenges: A review, *Results in Chemistry*

[2] International Energy Agency, 2021, How biogas can support intermittent renewable electricity, diakses pada 26 Juni 2026

[3] Kabeyi, M., Olanrewaju, O., 2022, Biogas Production and Applications in the Sustainable Energy Transition, *Journal of Energy*

[4] U.S. Environmental Protection Agency, 2026, Environmental benefits of anaerobic digestion (AD), diakses pada 26 Juni 2026

[5] Zainal, A.Z.A., Harun, R.H.R., Idrus, S.I.S., 2022, Performance monitoring of

anaerobic digestion at various organic loading rates of commercial Malaysian food waste, *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, Vol. **10**: 775676

[6] Hadiyanto, H., Octafalahanda, F.M., Nabila, J., Jati, A.K., Christwardana, M., Kusmiyati, K., Khoironi, A., 2023, Preliminary observation of biogas production from a mixture of cattle manure and bagasse residue in different composition variations, *International Journal of Renewable Energy Development*, Vol. **12**: 390 – 395

[7] Omondi, E.A., Ndiba, P.K., Chepkoech, G.K., Kegode, A.A., 2023, Modeling anaerobic co-digestion of water hyacinth with ruminal slaughterhouse waste for first order, modified Gompertz and logistic kinetic models, *International Journal of Renewable Energy Development*, Vol. **12**: 627 – 634

[8] Kriswantoro, J.A., Pan, K.Y., yeon Chu, C., 2024, Co-digestion approach for enhancement of biogas production by mixture of untreated napier grass and industrial hydrolyzed food waste, *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*, Vol. **11**

[9] Alghashm, S., Song, L., Liu, L., Ouyang, C., Zhou, J.L., Li, X., 2023, Improvement of Biogas Production Using Biochar from Digestate at Different Pyrolysis Temperatures during OFMSW Anaerobic Digestion, *Sustainability*

[10] Dastidar, S.G., 2006, Gompertz: A Scilab Program for Estimating Gompertz Curve Using Gauss-Newton Method of Least Squares, *Journal of Statistical Software*, Vol. **15**: 1–12

[11] Wang, Y., 2012, Gauss–Newton Method, *WIREs Computational Statistics*, Vol. **4**: 415–420

[12] Fauzi, D.A., Hananto, Y., Susmiati, Y., 2016, Komposisi campuran kotoran sapi dan limbah pucuk tebu (Saccharum officinarum L) sebagai bahan baku isian serta pengaruhnya terhadap pembentukan biogas, *Jurnal ROTOR*, Vol. **9**: 72 – 76

[13] Zhang, H., An, D., Tian, Y., Li, Y., 2021, Modelling the Biogas Production Kinetics of Anionic Surfactants Exposed Anaerobic Fermentation Process Using Sigmoidal Growth Functions, *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, Vol. **693**: 012064

[14] Montgomery, D.C., Peck, E.A., Vining, G.G., 2021, Introduction to Linear Regression Analysis, 6th, John Wiley & Sons, Hoboken

[15] Burden, R.L., Faires, J.D., Burden, A.M., 2016, Numerical Analysis, 10th, Cengage Learning, Boston, USA

[16] Li, Y., Zhang, Y., Sun, Y., Wang, J., 2018, Kinetics Analysis of Anaerobic Digestion of Wheat Straw Pretreated by Freezing-Thawing, *Chemical Engineering Transactions*, Vol. **81**: 107–112

[17] Elsayed, M., et al., 2022, Modeling of Biogas Production of Camel and Sheep Manure Using Tomato and Rumen as Co-Substrate via Kinetic Models, *Journal of Ecological Engineering*