Jurnal Matematika UNAND
Vol. **4** No. **1** Hal. 115 – 121
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

PRA A^*-MODUL ATAS PRA A^*-ALJABAR DAN ALJABAR *IF-THEN-ELSE* ATAS PRA A^*-ALJABAR

KHAINDRA
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
andrak79@yahoo.com

Abstrak. Tulisan ini mengkaji operasi *if-then-else* yang membahas Pra A^*-Modul atas Pra A^*-Aljabar dan aljabar *if-then-else* atas Pra A^*-Aljabar. Dinotasikan koleksi dari aljabar *if-then-else* atas A sebagai A-ITE dan koleksi dari Pra A^*-Modul sebagai A-MOD.

Kata Kunci: Aljabar Boolean, Operasi *if-then-else*, Aljabar *if-then-else* atas Pra A^*-Aljabar, Pra A^*-Modul atas Pra A^*-Aljabar

1. Pendahuluan

E.G. Manes [2] memperkenalkan teori persamaan dari operasi *if-then-else* dari bahasa pemograman dalam bentuk:

$$if_p(f,g)(x) = \begin{cases} f(x) \text{ , if } p(x) \text{ adalah benar} \\ g(x) \text{ , if } p(x) \text{ adalah salah} \end{cases} \tag{1.1}$$

E.G. Manes [2] telah mengkaji aljabar *if-then-else* atas aljabar Boolean, ADAs, aljabar C dan juga mempelajari modul atas aljabar Boolean, ADAs, aljabar C serta membuktikan ekivalen antara aljabar *if-then-else* atas aljabar dan modul atas aljabar yang bersesuaian.

Dalam tulisan ini akan diperkenalkan aljabar *if-then-else* atas Pra A^*-Aljabar dan Pra A^*-modul atas Pra A^*-Aljabar serta mempelajari sifat sifatnya yang merupakan kajian daripenulisan.

Definisi 1.1. [5] *Misalkan A adalah suatu himpunan tak kosong. Suatu sistem matematika $(A, \wedge, \vee, (-)^\sim)$ dikatakan suatu Pra A^*-Aljabar dan dinotasikan dengan $\overline{A}$ dan $\wedge, \vee$ suatu operasi biner $(-)^\sim$ operasi unary, jika untuk setiap $x, y, z \in A$ berlaku:*

(1) $x^{\sim\sim} = x$.
(2) $x \wedge x = x$.
(3) $x \wedge y = y \wedge x$.
(4) $(x \wedge y)^\sim = x^\sim \vee y^\sim$.
(5) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
(6) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

(7) $x \wedge y = x \wedge (x^{\sim} \vee y)$.

Suatu Pra A^*-Aljabar $\overline{A}$ dikatakan mempunyai identitas untuk $\wedge$ jika terdapat suatu $a \in A$ sedemikian sehingga $a \wedge x = x \wedge a = x$, $\forall x \in A$. Jika Pra A^*-Aljabar $\overline{A}$ mempunyai identitas untuk $\wedge$, maka identitasnya adalah tunggal dan dinotasikan dengan 1. Suatu Pra A^*-Aljabar $\overline{A}$ dikatakan mempunyai identitas untuk $\vee$ jika terdapat suatu $a \in A$ sedemikian sehingga $a \vee x = x \vee a = x$, $\forall x \in A$. Jika Pra A^*-Aljabar $\overline{A}$ mempunyai identitas untuk $\vee$, maka identitasnya adalah tunggal dan dinotasikan dengan 0.

Contoh 1.2. Misalkan himpunan $\mathbf{W} = \{0, 1, 2\}$ adalah suatu Pra A^*-Aljabar dengan operasi $\wedge, \vee, (\cdot)^{\sim}$ yang didefinisikan seperti pada Tabel 1 untuk operasi $\wedge$, Tabel 2 untuk operasi $\vee$ dan Tabel 3 untuk operasi $^{\sim}$:

Tabel 1. Operasi $\wedge$ pada $\overline{A}$

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

Tabel 2. Operasi biner $\vee$ pada $\overline{A}$

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

Tabel 3. Operasi $^{\sim}$ pada $\overline{A}$

x	$x^{\sim}$
0	1
1	0
2	2

Dari contoh tersebut diperoleh:

(1) $2^{\sim} = 2$,
(2) $1 \wedge x = x$ untuk semua $x \in W$,
(3) $0 \vee x = x$ untuk semua $x \in W$,
(4) $2 \wedge x = 2 \vee x = 2$.

2. Operasi If-Then-Else

Definisi 2.1. [5] *Misalkan $\overline{A}$ merupakan sebuah Pra A^*-Aljabar yang memuat 1. Misalkan $x, p, q \in A$. Operasi* if-then-else *atas $\overline{A}$ didefinisikan sebagai:*

$$if_x(p, q) := (x \wedge p) \vee (x^{\sim} \wedge q).$$

Proposisi 2.2. [5] *Setiap Pra A^*-Aljabar dengan beberapa konstanta tertentu harus memenuhi hukum berikut:*

(i) $if_2(p, q) = 2$,
(ii) $if_x(2, 2) = 2$,
(iii) $if_1(p, q) = p(q \neq 2)$,
(iv) $if_0(p, q) = q(p \neq 2)$,
(v) $if_x(1, 0) = x$.

Bukti.

(i) Akan dibuktikan $if_2(p, q) = 2$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} if_2(p, q) &= (2 \wedge p) \vee (2^{\sim} \wedge q), \\ &= 2 \vee (2 \wedge q), \\ &= 2 \vee 2, \\ &= 2. \end{aligned}$$

(ii) Akan dibuktikan $if_x(2, 2) = 2$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} if_x(2, 2) &= (x \wedge 2) \vee (x^{\sim} \wedge 2) \\ &= 2 \vee 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Pembuktian (iii) – (v) dilakukan dengan cara yang sama. □

Proposisi 2.3. [5] *Setiap Pra A^*-Aljabar memiliki aturan sebagai berikut:*

(i) $if_{x^{\sim}}(p, q) = if_x(q, p)$.
(ii) $if_x(p, q) \wedge r = if_x(p \wedge r, q \wedge r)$.
(iii) $if_x(p, q) \vee r = if_x(p \vee r, q \vee r)$.
(iv) $if_x(if_y(p, q), if_y(r, s)) = if_y(if_x(p, r), if_x(q, s))$.
(v) $if_{x \vee y}(p, q) = if_x(p, if_y(p, q))$.
(vi) $if_{x \wedge y}(p, q) = if_x(if_y((p, q), q))$.
(vii) $if_p(p, p) = p$.

Bukti.

(i) Akan dibuktikan $if_{x^\sim}(p,q) = if_x(q,p)$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} if_{x^\sim}(p,q) &= (x^\sim \wedge p) \vee (x^{\sim\sim} \wedge q), \\ &= (x^\sim \wedge p) \vee (x \wedge q), \\ &= (x \wedge q) \vee (x^\sim \wedge p), \\ &= if_x(q,p). \end{aligned}$$

(ii) Akan dibuktikan $if_x(p,q) \wedge r = if_x(p \wedge r, q \wedge r)$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} if_x(p,q) \wedge r &= ((x \wedge p) \vee (x^\sim \wedge q)) \wedge r, \\ &= \{(x \wedge p) \wedge r\} \vee \{(x^\sim \wedge q) \wedge r\}, \\ &= \{x \wedge (p \wedge r)\} \vee \{x^\sim \wedge (q \wedge r)\}, \\ &= if_x(p \wedge r, q \wedge r). \end{aligned}$$

Pembuktian (iii) – (vii) dilakukan dengan cara yang sama. □

Proposisi 2.4. [5] *Misalkan A adalah Pra A^*-Aljabar, $a \in B(A)$, maka* $\mathrm{if}_a(p,p) = p, \forall p \in A$.

3. Pra A^*-modul atas Pra A^*-Aljabar dan Aljabar *If-then -else* atas Pra A^*-Aljabar

Dalam bagian ini akan dijelaskan Pra A^*-modul atas Pra A^*-Aljabar dan aljabar *if-then-else* atas Pra A^*-Aljabar. Selanjutnya akan dikaji koleksi A-ITE dari semua aljabar *if-then-else* atas A dan variasi A-Mod dari Pra A^*-modul atas A.

Definisi 3.1. [5] *Misalkan $(A, \wedge, \vee, (-)^\sim, 0, 1, 2)$ adalah Pra A^*-Aljabar. Suatu aljabar if-then-else atas A adalah aljabar $(X, \cup, \varphi, \mathrm{if}_p(-,-))$ dimana X adalah himpunan tak kosong, $\cup$ adalah operasi biner, φ adalah elemen identitas dan* $\mathrm{if}_p(-,-)$ *adalah operasi if-then-else, $p \in A$. Untuk semua $f, g, h \in X$ dan $p, q, r \in A$ berlaku:*

(i) $f \cup (g \cup h) = (f \cup g) \cup h$.
(ii) $f \cup g = g \cup f$.
(iii) $f \cup \varphi = f, f \cup f = f$.
(iv) $if_1(f,g) = f, if_0(f,g) = g, if_2(f,g) = \varphi$.
(v) $if_p(f \cup a, g \cup b) = if_p(f,g) \cup if_p(a,b)$.

Selanjutnya didefinisikan $if_{pqr}(f,g) = if_p(if_q(f,g), if_r(f,g))$. Kemudian dinotasikan koleksi dari aljabar if-then-else atas A adalah A-ITE.

Definisi 3.2. [5] *Misalkan A adalah suatu Pra A^*-Aljabar dengan $0, 1, 2$. Suatu Pra A^*-modul atas A adalah semi-lattice $(X, \cup, \varphi)$ dengan $\cup$ biner, φ identitas, dan suatu operasi unary f yakni pf, untuk semua $f \in X, p \in A$ yang memenuhi:*

(i) $p(f \cup g) = pf \cup pg$.
(ii) $0f = \varphi = p\varphi$.

(iii) $1f = f; 2f = \varphi$,

dan selanjutnya didefinisikan $(pqr)f = p(qf) \cup p^{\sim}(rf)$. *Kemudian dinotasikan koleksi dari Pra A^*-modul adalah A-Mod.*

Teorema 3.3. [5] *A-ITE dan A-Mod adalah koleksi yang ekivalen. Struktur A-Mod dari aljabar if-then-else diberikan sebagai* $pf = if_p(f, \varphi)$ *dimana suatu bagian invers adalah* $if_p(f, g) = pf \cup p^{\sim}g$.

Bukti. Misalkan $(X, \cup, \varphi, if_p(-,-))(p \in A)$ adalah suatu aljabar *if-then-else*. Jelas $(X, \cup, \varphi)$ adalah suatu semi-lattice dengan identitas φ. Sekarang didefinisikan untuk $p \in A, f \in X, pf = if_p(f, \varphi)$:

(i) Akan dibuktikan $(pqr)f = p(qf) \cup p^{\sim}(rf)$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(pqr)f &= if_{pqr}(f, \varphi),\\ &= if_p(if_q(f.\varphi), if_r(f, \varphi)), \text{ (Definisi 3.2)},\\ &= if_p(qf, rf),\\ &= p(qf) \cup p^{\sim}(rf).\end{aligned}$$

(ii) Akan dibuktikan $p(f \cup g) = pf \cup pg$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}p(f \cup g) &= if_p(f \cup g, \varphi),\\ &= if_p(f \cup g, \varphi \cup \varphi) \text{ (Definisi 3.2)}\\ &= if_p(f, \varphi) \cup if_p(g, \varphi) \text{ (Definisi 3.2)}\\ &= pf \cup pg.\end{aligned}$$

(iii) Akan dibuktikan $0f = \varphi$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}0f &= if_0(f, \varphi),\\ &= \varphi \text{ (Definisi 3.2)}.\end{aligned}$$

(iv) Akan dibuktikan

(1) $1f = f$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}1f &= if_1(f, \varphi)\\ &= f \text{ (Definisi 3.2)}.\end{aligned}$$

(2) $2f = \varphi$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}2f &= if_2(f, \varphi)\\ &= \varphi \text{ (Definisi 3.2)}.\end{aligned}$$

Oleh karena itu terbukti $(X, \cup, \varphi)$ adalah suatu Pra A^*-modul atas A.

Sebaliknya misalkan $(X, \cup, \varphi)$ adalah suatu Pra A^*-modul atas A. Dengan jelas $(X, \cup, \varphi)$ memenuhi 3.1 (i),(ii) dan (iii). Didefinisikan, $\forall p \in A$ dan untuk semua $f, g \in X$ oleh $if_p(f, g) = pf \cup p^{\sim}g$.

(i) Akan dibuktikan $if_{pqr}(f, g) = if_p(if_q(f, g).if_r(f, g))$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} if_{pqr}(f, g) &= (pqr)f \cup (pqr)^{\sim}g, \\ &= (pqr)f \cup (pq^{\sim}r^{\sim})g, \\ &= p(qf) \cup p^{\sim}(rf) \cup p(q^{\sim}g) \cup p^{\sim}(r^{\sim}g), \\ &= p(qf \cup q^{\sim}g) \cup p^{\sim}(rf \cup r^{\sim}g), \\ &= p(if_q(f, g)) \cup p^{\sim}(if_r(f, g)), \\ &= if_p(if_q(f, g).if_r(f, g)). \end{aligned}$$

(ii) Akan dibuktikan

(1) $if_1(f, g) = 1$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} if_1(f, g) &= 1.f \cup 1^{\sim}g, \\ &= f \cup (0.g) \text{ (Definisi 3.2)}, \\ &= f \cup \varphi \text{ (Definisi 3.2)}, \\ &= f \text{ (Definisi 3.2)}. \end{aligned}$$

(2) $if_0(f, g) = g$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} if_0(f, g) &= 0.f \cup 0^{\sim}g, \\ &= \varphi \cup 1g \text{ (Definisi 3.2)}, \\ &= \varphi \cup g \text{ (Definisi 3.2)}, \\ &= g \text{ (Definisi 3.2)}. \end{aligned}$$

(3) $if_2(f, g) = \varphi$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} if_2(f, g) &= 2.f \cup 2^{\sim}g, \\ &= \varphi \cup \varphi \text{ (Definisi 3.2)}, \\ &= \varphi \text{ (Definisi 3.2)}. \end{aligned}$$

(iii) Akan dibuktikan $if_p(f \cup a, g \cup b) = if_p(f, g) \cup if_p(a, b)$.
Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} if_p(f \cup a, g \cup b) &= p(f \cup a) \cup p^{\sim}(g \cup b), \\ &= pf \cup pa \cup p^{\sim}g \cup p^{\sim}b \text{ (Definisi 3.2)}, \\ &= pf \cup p^{\sim}g \cup pa \cup p^{\sim}b, \\ &= if_p(f, g) \cup f_p(a, b). \end{aligned}$$

Karna itu $(X, \cup, \varphi, if_p(-, -))(p \in A)$ adalah aljabar *if-then-else* atas A. Oleh karena itu terbukti bahwa A-ITE dan A-Mod adalah koleksi yang ekivalen. $\square$

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Yanita, Bapak Narwen M.Si, dan Ibu Dr Susila Bahri yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

[1] Guzman, F dkk. 1990. The Algebra of Conditional Logic, *Algebra Universalis*: 88 – 110

[2] Manes E.G. 1993. ADAs and the Equational Theory of If-Then-Else, *Algebra Universalis*, 373 – 394

[3] Birkhoff, G. 1948. *Lattice Theory*, Revised Edition, America Mathematical Society

[4] Munir, R. *Matematika Diskrit*, Edisi Ketiga, Penerbit Informatika Bandung

[5] Rao, J.V dkk. 2009. Pre A^*-Modules and If-Then-Else Algebra Over Pre A^*-Algebra, *International Journal of Systemic, Cybernetics and Informatics*: 11 – 15