Jurnal Matematika UNAND
Vol. **1** No. **2** Hal. 39 – 43
ISSN : 2303–291X

EKSISTENSI BAGIAN IMAJINER PADA INTEGRAL FORMULA INVERSI FUNGSI KARAKTERISTIK

YULIANA PERMATASARI
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas Padang,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia
anazharian@gmail.com

Abstrak. Formula inversi dari fungsi karakteristik $\varphi_X(t)$ dengan fungsi distribusi F adalah

$$F(x) - F(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t)dt$$

untuk setiap $-\infty < x < \infty$.

Syarat perlu dan cukup untuk

$$\lim_{T\to\infty} Im \left(\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{T} \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t)dt \right)$$

ada adalah

$$lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{G(u,x) - (u,0)}{u} du$$

ada, dimana

$$G(u,x) = F(u+x) - F(-u+x).$$

Kata Kunci: Fungsi distribusi, fungsi karakteristik, formula inversi.

1. Pendahuluan

Misalkan $F(x)$ adalah fungsi distribusi dan $\varphi_X(t)$ fungsi karakteristik yang didefinisikan sebagai berikut

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}],$$

di mana $e^{itX} = \cos(tX) + i\sin(tX)$. Formula inversi dari fungsi karakteristik $\varphi_X(t)$, yaitu

$$F(x) - F(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx} - 1}{-it} \varphi_X(t)dt. \tag{1.1}$$

Formula inversi (1) dapat dipisahkan menjadi bagian real dan bagian imajiner, yaitu

$$Re \left(\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{T} \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t)dt \right) = Re \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{0} \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t)dt \right)$$

dan

$$Im \left(\frac{1}{2\pi} \int_{0}^{T} \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t)dt \right) = -Im \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{0} \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t)dt \right)$$

karena bagian imajiner pada $\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{e^{-itx}-1}{-it}\varphi_X(t)dt$ tidak selalu ada, dalam paper ini dibahas kajian eksistensi integral pada formula inversi untuk bagian imajiner.

2. Eksistensi Bagian Imajiner Pada Integral Formula Inversi Fungsi Karakteristik

Teorema 2.1. [**3**] *Syarat perlu dan cukup untuk*

$$\lim_{T\to\infty} Im\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{exp(-itx)-1}{-it}\varphi_X(t)dt\right) \tag{2.1}$$

ada adalah

$$lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^\infty \frac{G(u,x)-(u,0)}{u}du \tag{2.2}$$

ada, di mana

$$G(u,x) = F(u+x) - F(-u+x) \tag{2.3}$$

Bukti. Perhatikan bahwa bentuk integral (3) ada pada lingkungan tak hingga. Kemudian misalkan

$$G(u,x) - G(u,0) = [F(u+x) - F(u)] - [F(-u+x) - F(-u)] \tag{2.4}$$

dan

$$F(x+u) - F(u) \in L(-\infty,\infty).$$

Misalkan

$$I(x,T) = Im\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^T \frac{exp(-itx)-1}{-itx}\varphi_X(t)dt\right).$$

Dapat dilihat bahwa

$$\begin{aligned}
I(x,T) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dF(u)\int_0^T \frac{\sin xt\sin ut - \cos ut + \cos xt\cos ut}{t}dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dF(u)\int_0^T \frac{\cos(u-x)t - \cos ut}{t}dt\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dF(u)\int_0^T dt\int_{u-x}^{u}\sin tv\ dv\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dF(u)\int_{u-x}^{u}\frac{1-\cos vT}{v}dv\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos vT}{v}dv\int_v^{v+x} dF(u)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}[G(v,x)-G(v,0)]\frac{1-\cos vT}{v}dv.
\end{aligned}$$

Berdasarkan Lema *Riemann-Lebesgue* [2] maka

$$\lim_{T\to\infty}\int_\varepsilon^\infty [G(v,x)-G(v,0)]\frac{\cos vT}{v}dv = 0 \text{ untuk setiap } \varepsilon > 0.$$

Untuk $\varepsilon > 0$ sebarang dan $T \to 0$ dapat ditulis bahwa

$$I(x,T) = \int_0^\varepsilon \frac{[G(v,x) - G(v,0)]}{v}(\cos vT)dv + \int_\varepsilon^\infty \frac{[G(v,x) - G(v,0)]}{v}dv + o(1) \tag{2.5}$$

($\Rightarrow$) Misalkan terdapat sebarang $\varepsilon > 0$ dan

$$\begin{aligned} &\int_0^\varepsilon \frac{G(v,x) - G(v,0)}{v}(1 - \cos vT)dv \\ &= \int_0^{1/T} + \int_{1/T}^\varepsilon = K_1 + K_2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

di mana

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^{1/T} G(v,x) - G(v,0)\frac{1-\cos vT}{v}dv \\ &\leq CT \int_0^{1/T} |G(v,x) - G(v,0)|dv \end{aligned} \tag{2.7}$$

untuk suatu konstanta C. Karena F fungsi tak turun maka $\lim_{v\to 0}[G(v,x) - G(v,0)] = 0$, sehingga (8) konvergen ke nol. Jadi dapat diperoleh

$$K_1 = o(1) \quad \textit{untuk} \quad T \to \infty. \tag{2.8}$$

Definisikan

$$\chi(v) = G(v,x) - G(v,0). \tag{2.9}$$

Pilih $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $|\chi(v)| < \delta$ untuk $|v| \leq \varepsilon$, untuk sebarang δ. Karena $\chi(v)/v$ terbatas pada $[1/T, \varepsilon]$, dengan menggunakan Teorema Nilai Tengah Kedua [1] diperoleh

$$\begin{aligned} K_2 &= \int_{1/T}^\varepsilon G(v,x) - G(v,0)\frac{1-\cos vT}{v}dv \\ &\leq \int_{1/T}^\varepsilon \frac{\chi(v)}{v} - T\chi\left(\frac{1}{T}\right)\int_{1/T}^\xi \cos vT dv - \left(\frac{\chi(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\int_\xi^\varepsilon \cos vT dv \end{aligned} \tag{2.10}$$

untuk $1/T < \xi < \varepsilon$. Maka

$$\left| K_2 - \int_{1/T}^\varepsilon \frac{\chi(v)}{v}dv \right| \leq 2\chi\left(\frac{1}{T}\right) + 2\chi(\varepsilon) \leq 4\delta \tag{2.11}$$

Oleh karena (6) dan (7) diperoleh

$$\left| I(x,T) - \frac{1}{2\pi}\int_{1/T}^\infty \frac{\chi(v)}{v}dv \right| \leq \frac{2\delta}{\pi} + o(1). \tag{2.12}$$

Ini menunjukkan syarat cukup dan sekaligus menyatakan (3) ada.

($\Leftarrow$) Misalkan $\chi(v)$ didefinisikan seperti (11). Dapat dilihat bahwa $\lim_{v\to 0^+} \chi(v) = c$. Jika $c \neq 0$, maka dengan menggunakan (6) diperoleh

$$I(x,T) - c\int_0^\varepsilon \frac{1-\cos vT}{v}dv = \int_0^\varepsilon \frac{[\chi(v) - c](1-\cos vT)}{v}dv + \int_0^\infty \frac{\chi(v)}{v}dv + o(1). \tag{2.13}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\varepsilon} \frac{[\chi(v)-c](1-\cos vT)}{v} dv \\
&= \int_0^{1/T} + \int_{1/T}^{\varepsilon} = L_1 + L_2,
\end{aligned}$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
L_1 &= \int_0^{1/T} \frac{[\chi(v)-c](1-\cos vT)}{v} dv \\
&\leq CT \int_0^{1/T} |\chi(v)-c| dv.
\end{aligned}$$

Dari (14) diperoleh

$$\left| I(x,T) - \frac{c}{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{1-\cos vT}{v} dv - \frac{1}{2\pi}\int_{1/T}^{\varepsilon} \frac{\chi(v)}{v} dv - \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\chi(v)}{v} dv \right| \leq C_1\delta + o(1), \tag{2.14}$$

untuk suatu konstanta C_1 .

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{1-cos\ vT}{v} dv = 2\int_0^{\varepsilon T} \frac{sin^2 v/2}{v} dv \geq C_2\ \log\ \varepsilon T, \tag{2.15}$$

untuk suatu konstanta C_2. Pilih sebarang $\varepsilon > 0$, diberikan $\eta < C_2$ sedemikian sehingga $|\chi(v) - c| < \eta$ untuk $0 < v < \varepsilon$. Maka

$$\left| \int_{1/T}^{\varepsilon} \frac{\chi(v)-c}{v} dv \right| \leq \eta \log \varepsilon T. \tag{2.16}$$

Jika limit $I(x,T)$ ada untuk $T \to \infty$, maka karena (16) dan (17), implikasi (15) kontradiksi. Oleh karena itu maka $c = 0$, sehingga

$$\left| I(x,T) - \frac{1}{2\pi}\int_{1/T}^{\infty} \frac{\chi(v)}{v} dv \right| \leq C_1\delta + o(1). \tag{2.17}$$

Syarat perlu terbukti. □

3. Ilustrasi

Fungsi karakteristik dari sebaran $U(0,1)$ adalah $\varphi_X(t) = i(1 - exp(it))/t$ dengan fungsi distribusi $F(x) = x$. Maka formula inversi dari sebaran $U(0,1)$ adalah

$$\begin{aligned}
F(x) - F(0) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{exp(-itx)-1}{-it}\varphi_X(t)dt \\
&= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\cos(t-tx) - \cos tx - \cos t + 1}{t^2} dt \\
&\quad + i \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{\sin tx + \sin(t-tx) + \sin t}{t^2} dt
\end{aligned}$$

Diperoleh

$$I(x,T) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{\sin tx + \sin(t-tx) + \sin t}{t^2} dt$$

Kemudian akan ditunjukkan

$$\lim_{T\to\infty} Im \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t) dt \right) = \int_0^\infty \frac{G(u,x) - G(u,0)}{u} du$$

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} I(x,T) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{\sin tx + \sin(t-tx) + \sin t}{t^2} dt \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \frac{-\cos Tx + \cos(-T+Tx) + xT\sin T + 1 - \cos T}{t^3} dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} G(u,x) &= F(u+x) - F(-u+x) \\ &= 2u \\ G(u,0) &= F(u+0) - F(-u+0) \\ &= 2u \end{aligned}$$

Sedemikian sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^\infty \frac{G(u,x) - G(u,0)}{u} du &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^\infty \frac{2u - 2u}{u} du \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dalam hal ini dapat dilihat bahwa,

$$\lim_{T\to\infty} Im \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{exp(-itx) - 1}{-it} \varphi_X(t) dt \right) = lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_0^\infty \frac{G(u,x) - G(u,0)}{u} du$$

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dodi Devianto, Bapak Admi Nazra, Ibu Hazmzra Yozza, Ibu Lyra Yulianti, dan Bapak Syafrizal Sy, yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bartle, R.G. dan Donald R.S. 1927. *Introduction to Real Analysis, 2^{nd} Edition.* John Wiley and Sons Inc., Singapore.
[2] Jain, P.K. dan V.P. Gupta. 1976. *Lebesgue Measure and Integration.* Wiley Eastern Limited, New Delhi.
[3] Kawata, T. 1969. *On The Inversion Formula For The Characteristic Function.* Pacific Journal of Mathematics.