

## BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* UNTUK GRAF KUBIK $C_{n,2n,n}$

NESSA

*Program Studi Magister Matematika,  
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,  
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,  
 email : gitarisha@gmail.com*

**Abstrak.** Misalkan  $G = (V(G), E(G))$  adalah suatu graf terhubung tak *trivial*. Suatu pewarnaan terhadap sisi-sisi di  $G$  adalah suatu pemetaan  $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}$ . Lintasan  $u - v$  path  $P$  di  $G$  dinamakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di  $P$  yang berwarna sama. Graf  $G$  disebut *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di  $G$  dihubungkan oleh *rainbow path*. Bilangan *rainbow connection* dari graf terhubung  $G$ , ditulis  $rc(G)$ , didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf  $G$  bersifat *rainbow connected*. Suatu Graf Kubik  $C_{n,2n,n}$  merupakan graf kubik terhubung yang terbentuk dari tiga lingkaran dengan banyak titik pada lingkaran pertama sama dengan lingkaran ketiga yaitu sebanyak  $n$  dan banyak titik pada lingkaran kedua sebanyak  $2n$  dengan himpunan sisi  $E_i$  merupakan himpunan sisi yang menghubungkan lingkaran ke- $i$  dengan lingkaran ke- $i + 1$ . Pada paper ini ditunjukkan bahwa  $rc(C_{5,10,5}) = 7$  dan  $rc(C_{6,12,6}) = 8$ .

**Kata Kunci:** Graf kubik, graf lingkaran, bilangan *rainbow connection*

### 1. Pendahuluan

Dewasa ini semakin banyak model matematika maupun penalaran matematika yang digunakan sebagai alat bantu dalam menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam berbagai disiplin ilmu. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu materi pada teori graf yang berkembang dan menjadi perhatian saat ini adalah konsep pewarnaan graf. Pewarnaan graf mempunyai penerapan yang cukup luas, antara lain dalam penentuan jalur lalu lintas darat, lalu lintas penerbangan, jaringan telekomunikasi hingga penjadwalan perkuliahan, dimana penerapan tersebut bertujuan agar mendapatkan hasil yang efisien dan tidak saling tumpang tindih.

Salah satu konsep pewarnaan graf yang berkembang saat ini adalah penentuan bilangan *rainbow connection* (*rainbow connection number*). Konsep *rainbow connection* suatu graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk [2]. Misalkan  $G = (V(G), E(G))$  adalah suatu graf terhubung tak *trivial*. Definisikan pewarnaan terhadap sisi-sisi di  $G$  adalah suatu pemetaan  $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}$ . Lintasan  $u - v$  path  $P$  di  $G$  dinamakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di  $P$  yang berwarna sama. Graf  $G$  disebut *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di  $G$  dihubungkan oleh *rainbow path*. Dalam hal ini, pewarnaan graf  $G$  dise-

but *rainbow coloring* dan jika ada sebanyak  $k$  warna yang digunakan, maka pewarnaannya disebut *rainbow  $k$ -coloring*. Bilangan yang menunjukkan jumlah minimum warna yang diperlukan untuk mewarnai sisi graf  $G$  sehingga graf tersebut bersifat *rainbow connected* disebut bilangan *rainbow connection* (*rainbow connection number*) dari graf terhubung  $G$ , dilambangkan dengan  $rc(G)$ .

Jika  $G$  graf terhubung tak *trivial* berukuran  $m$  dan diameter  $diam(G) = \max\{d(u, v) | u, v \in V(G)\}$ , maka berlaku

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m. \quad (1.1)$$

Chartrand dkk [2] menentukan bilangan *rainbow connection* dari beberapa kelas graf khusus seperti graf pohon, graf lengkap dan graf lingkaran (*cycle*). Hasil dari [2] digunakan dalam penentuan bilangan *rainbow connection* pada graf kubik  $C_{n,2n,n}$  yang disajikan pada proposisi berikut.

**Proposisi 1.1.** [2] *Misalkan  $C_n$  adalah graf lingkaran dengan banyak titik  $n$ , maka  $rc(C_n) = src(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$  untuk  $n \geq 4$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .*

**Bukti.** Misalkan terdapat lingkaran  $C_n : v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1} = v_1$  untuk setiap  $i$  dengan  $1 \leq i \leq n$ , misalkan  $e_i = v_i v_{i+1}$ . Pandang dua kasus sebagai berikut.

**Kasus 1.** Untuk  $n$  genap. Misalkan  $n = 2k$  untuk bilangan bulat  $k \geq 2$  maka  $src(C_n) \geq rc(C_n) \geq diam(C_n) = k$ . Definisikan pewarnaan sisi  $c_0$  pada  $C_n$  sebagai berikut,

$$c_0(e_i) = \begin{cases} i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq k; \\ i - k, & \text{untuk } k + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Karena  $c_0$  adalah *strong rainbow  $k$ -coloring* maka  $rc(C_n) \leq src(C_n) \leq k$ . Oleh sebab itu  $rc(C_n) = src(C_n) = k$ .

**Kasus 2.** Untuk  $n$  ganjil. Misalkan  $n = 2k + 1$  untuk bilangan bulat  $k \geq 2$ . Definisikan pewarnaan sisi  $c_1$  pada  $C_n$  sebagai berikut,

$$c_1(e_i) = \begin{cases} i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq k + 1; \\ i - k - 1, & \text{untuk } k + 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Karena  $c_1$  adalah *strong rainbow  $(k + 1)$ -coloring* pada  $C_n$  maka  $rc(C_n) \leq src(C_n) \leq k + 1$ . Karena  $rc(C_n) \geq diam(C_n) = k$  maka  $rc(C_n) = k$  atau  $rc(C_n) = k + 1$ . Klaim bahwa  $rc(C_n) = k + 1$ . Asumsikan sebaliknya, bahwa  $rc(C_n) = k$ . Misalkan  $c'$  adalah suatu *rainbow  $k$ -coloring* pada  $C_n$  dan misalkan  $u$  dan  $v$  dua titik antipodal dari  $C_n$ . Maka  $u - v$  *geodesic* di  $C_n$  adalah *rainbow path* dan  $u - v$  *path* lainnya di  $C_n$  bukan merupakan *rainbow path* karena panjang lintasannya  $k + 1$ . Tanpa mengurangi perumuman, misalkan  $c'(v_{k+1}v_{k+2}) = k$ . Perhatikan titik-titik  $v_1, v_{k+1}$  dan  $v_{k+2}$ . Karena lintasan  $v_1 - v_{k+1}$  *geodesic*  $P : v_1, v_2, \dots, v_{k+1}$  adalah *rainbow path* dan lintasan  $v_1 - v_{k+2}$  *geodesic*,  $Q : v_1, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{k+2}$  adalah *rainbow path*, maka sisi-sisi di  $P$  dan  $Q$  diwarnai dengan  $k$  warna. Karena  $v_2 - v_{k+2}$  *geodesic*,  $v_2, v_3, \dots, v_{k+2}$  adalah *rainbow path* maka  $c'(v_1v_2) = k$ . Dengan cara yang sama,  $v_n - v_{k+1}$  *geodesic*,  $v_n, v_{n-1}, v_{n-2}, \dots, v_{k+1}$  merupakan *rainbow path* maka  $c'(v_nv_1) = k$ . Dengan demikian diperoleh  $c'(v_1v_2) = c'(v_nv_1) = k$ . Akibatnya tidak

terdapat *rainbow*  $v_2 - v_n$  *path* di  $G$ . Hal ini kontradiksi dengan  $c'$  adalah suatu *rainbow*  $k$ -*coloring* dari  $C_n$ . Oleh karena itu  $rc(C_n) = src(C_n) = k + 1$ .  $\square$

## 2. Bilangan *Rainbow Connection* untuk Graf Kubik $C_{n,2n,n}$

Suatu graf kubik  $C_{n_1,n_2,\dots,n_k}$  adalah suatu graf kubik yang dibentuk dari  $k$  buah lingkaran  $C_{n_i}^i$  dengan  $i = 1, 2, \dots, k$ , dimana  $C_{n_i}^i := v_{i1}v_{i2} \dots v_{in_i}v_{i1}$  adalah suatu graf lingkaran ke- $i$  dengan  $n_i$  titik. Himpunan titik dan himpunan sisi dari graf kubik  $C_{n_1,n_2,\dots,n_k}$  adalah

$$V(C_{n_1,n_2,\dots,n_k}) = \bigcup_{i=1}^k V(C_{n_i}^i),$$

$$E(C_{n_1,n_2,\dots,n_k}) = \bigcup_{i=1}^k E(C_{n_i}^i) \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} E_i.$$

Jika  $n_1 = n_k = n$  dan  $n_2 = n_3 = \dots = n_{k-1} = 2n$ , maka graf kubiknya adalah  $C_{n,2n,\dots,2n,n}$  dengan himpunan sisi  $E_i$  merupakan himpunan sisi yang menghubungkan lingkaran ke- $i$  dengan lingkaran ke- $i+1$ .

Pada paper ini akan dikaji mengenai graf Kubik  $C_{n,2n,n}$  dengan himpunan sisi  $E_i$  sebagai berikut.

$$E_1 = v_{1j}v_{2(2j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$E_2 = v_{2j}v_{3(j/2)}, \quad j = 2, 4, \dots, 2n.$$

**Teorema 2.1.**  $\diamond$  *Bilangan rainbow connection dari graf kubik  $C_{n,2n,n}$  untuk  $n = 5$  adalah 7.*

**Bukti.** Akan ditunjukkan  $rc(C_{5,10,5}) \leq 7$ . Definisikan pewarnaan sisi  $c : E(C_{5,10,5}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 7\}$  sebagai berikut.

(a) Pewarnaan sisi pada  $C_5^i$  untuk  $i = 1$  dan  $i = 3$ .

Misalkan  $n = 2k + 1$  untuk suatu  $k$  bilangan asli. Maka

$$c(v_{ij}v_{i(j+1)}) = \begin{cases} j, & \text{untuk } 1 \leq j \leq 3; \\ j - k - 1, & \text{untuk } 4 \leq j \leq 5. \end{cases}$$

(b) pewarnaan sisi pada  $C_{10}^2$ ,

$$c(v_{2j}v_{2(j+1)}) = \begin{cases} j, & \text{untuk } 1 \leq j \leq 5; \\ j - n, & \text{untuk } 6 \leq j \leq 10. \end{cases}$$

(c) pewarnaan sisi untuk  $E_1$  dan  $E_2$ :

$$c(E_1) = 6 \text{ dan } c(E_2) = 7.$$

Dari definisi pewarnaan sisi-sisi graf  $C_{5,10,5}$  di atas,  $c$  merupakan *rainbow* 7-*coloring*. Oleh karena itu,  $rc(C_{5,10,5}) \leq 7$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan  $rc(C_{5,10,5}) \geq 7$  dengan langkah-langkah sebagai berikut.

**Langkah 1.** Asumsikan bahwa  $rc(C_{5,10,5}) \leq 6$ , maka pewarnaan graf  $C_{5,10,5}$  merupakan *rainbow 6-coloring*. Artinya Graf  $C_{5,10,5}$  yang terdiri dari  $C_5^1 \cup C_{10}^2 \cup C_5^3 \cup E_1 \cup E_2$  bersifat *rainbow connected* jika diberikan 6 warna.

**Langkah 2.** Warnai graf  $C_5^1, C_{10}^2$  dan  $C_5^3$  sesuai dengan definisi pewarnaan *cycle* pada Proposisi 1.1, agar masing-masing *cycle* bersifat *rainbow connected*, sedemikian sehingga terdapat 5 warna pada  $C_5^1, C_{10}^2$  dan  $C_5^3$ .

**Langkah 3.** Pewarnaan selanjutnya untuk sisi-sisi di  $E_1$ , jika sisi-sisi di  $E_1$  diberi suatu pewarnaan yang terdapat pada  $C_5^1, C_{10}^2$  dan  $C_5^3$  maka semua lintasan dari titik  $v_{14}$  ke titik  $v_{22}$  yang melalui titik lain di  $C_5^1$  bukan merupakan *rainbow path* karena pada lintasan tersebut terdapat warna yang sama pada sisi-sisinya tanpa memandang warna yang diberikan pada  $E_1$ , dan jika lintasan dari titik  $v_{14}$  ke titik  $v_{22}$  melalui titik-titik di  $C_{10}^2$  maka jumlah sisi yang dilalui adalah sebanyak 6. Jadi haruslah sisi-sisi di  $E_1$  diberi pewarnaan yang berbeda dari pewarnaan sisi di  $C_5^1, C_{10}^2$  dan  $C_5^3$  yaitu 6 sedemikian sehingga terdapat 6 warna pada  $C_5^1, C_{10}^2, C_5^3$  dan  $E_1$ .

**Langkah 4.** Pewarnaan selanjutnya untuk sisi-sisi di  $E_2$ , jika sisi-sisi di  $E_2$  diberi suatu pewarnaan yang sama dengan sisi-sisi di  $E_1$  maka untuk setiap *path* yang menghubungkan titik-titik di  $C_5^1$  dengan titik-titik di  $C_5^3$  bukanlah merupakan *rainbow path*. Kemudian, semua lintasan dari titik  $v_{27}$  ke titik  $v_{31}$  yang melalui titik lain di  $C_5^3$  bukan merupakan *rainbow path* karena pada lintasan tersebut terdapat warna yang sama pada sisi-sisinya tanpa memandang warna yang diberikan pada  $E_2$ , dan jika lintasan dari titik  $v_{27}$  ke titik  $v_{31}$  melalui titik-titik di  $C_{10}^2$  maka jumlah sisi yang dilalui adalah sebanyak 6. Jadi haruslah sisi-sisi di  $E_2$  diberi pewarnaan yang berbeda dari pewarnaan sisi di  $C_5^1, C_{10}^2, C_5^3$  dan  $E_1$  yaitu 7 sedemikian sehingga terdapat 7 warna pada  $C_5^1, C_{10}^2, C_5^3, E_1$  dan  $E_2$ .

Dari langkah-langkah di atas, dapat dilihat bahwa dengan 6-pewarnaan, graf  $C_{5,10,5}$  bukan merupakan graf yang *rainbow connected*. Jadi haruslah  $rc(C_{5,10,5}) > 6$  dengan kata lain  $rc(C_{5,10,5}) \geq 7$  agar setiap titiknya terhubung oleh *rainbow path*. Oleh karena itu,  $rc(C_{5,10,5}) = 7$ .  $\square$

**Teorema 2.2.**  $\diamond$  *Bilangan rainbow connection dari graf kubik  $C_{6,12,6}$  adalah 8.*

**Bukti.** Akan ditunjukkan  $rc(C_{6,12,6}) \leq 8$ . Definisikan pewarnaan sisi  $c : E(C_{6,12,6}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 8\}$  sebagai berikut:

(a) Pewarnaan sisi pada  $C_6^i$  untuk  $i = 1$  dan  $i = 3$ ,

Misalkan  $n = 2k$  untuk suatu  $k$  bilangan asli.

$$c(v_{ij}v_{i(j+1)}) = \begin{cases} j, & \text{untuk } 1 \leq j \leq 3; \\ j - k - 1, & \text{untuk } 4 \leq j \leq 6. \end{cases}$$

(b) Pewarnaan sisi pada  $C_{12}^2$ ,

$$c(v_{2j}v_{2(j+1)}) = \begin{cases} j, & \text{untuk } 1 \leq j \leq 6; \\ j - n, & \text{untuk } 7 \leq j \leq 12. \end{cases}$$

(c) Pewarnaan sisi untuk  $E_1$  dan  $E_2$  sebagai berikut.

$$c(E_1) = 7 \text{ dan } c(E_2) = 8.$$

Dari definisi pewarnaan sisi-sisi graf  $C_{6,12,6}$  di atas,  $c$  merupakan *rainbow 8-coloring*. Oleh karena itu,  $rc(C_{6,12,6}) \leq 8$ .

Selanjutnya, akan ditunjukkan  $rc(C_{6,12,6}) \geq 8$  dengan langkah-langkah sebagai berikut.

**Langkah 1.** Asumsikan bahwa  $rc(C_{6,12,6}) \leq 7$ , maka pewarnaan graf  $C_{6,12,6}$  merupakan *rainbow 7-coloring*. Artinya Graf  $C_{6,12,6}$  yang terdiri dari  $C_6^1 \cup C_{12}^2 \cup C_6^3 \cup E_1 \cup E_2$  bersifat *rainbow connected* jika diberikan 7 warna.

**Langkah 2.** Warnai graf  $C_6^1, C_{12}^2$  dan  $C_6^3$  sesuai dengan definisi pewarnaan *cycle* pada Proposisi 1.1, agar masing-masing *cycle* bersifat *rainbow connected*, sedemikian sehingga terdapat 6 warna pada  $C_6^1, C_{12}^2$  dan  $C_6^3$ .

**Langkah 3.** Pewarnaan untuk sisi-sisi di  $E_1$ , jika sisi-sisi di  $E_1$  diberi suatu pewarnaan sisi yang terdapat pada  $C_6^1, C_{12}^2$  dan  $C_6^3$ , maka semua lintasan dari titik  $v_{11}$  ke titik  $v_{28}$  yang melalui titik lain di  $C_6^1$  bukan merupakan *rainbow path* karena pada lintasan tersebut terdapat warna yang sama pada sisi-sisinya tanpa memandang warna yang diberikan pada  $E_1$  dan jika sisi di  $E_1$  diberi warna 1 maka semua lintasan yang menghubungkan titik  $v_{11}$  ke titik  $v_{22}$  bukanlah *rainbow path*. Jika lintasan dari titik  $v_{11}$  ke titik  $v_{28}$  melalui titik-titik di  $C_{12}^2$  maka jumlah sisi yang dilalui paling sedikit adalah sebanyak 6 sehingga sisi-sisinya diberi warna  $2, 3, \dots, 7$ . Jadi haruslah sisi-sisi di  $E_1$  diberi pewarnaan yang berbeda dari pewarnaan sisi di  $C_6^1, C_{12}^2$  dan  $C_6^3$  yaitu 7 sedemikian sehingga terdapat 7 warna pada  $C_6^1, C_{12}^2, C_6^3$  dan  $E_1$ .

**Langkah 4.** Pewarnaan selanjutnya untuk sisi-sisi di  $E_2$ , jika sisi-sisi di  $E_2$  diberi suatu pewarnaan yang sama dengan sisi-sisi di  $E_1$  maka untuk setiap *path* yang menghubungkan titik-titik di  $C_6^1$  dengan titik-titik di  $C_6^3$  bukanlah merupakan *rainbow path*. Jika sisi-sisi di  $E_2$  diberi suatu pewarnaan sisi yang terdapat pada  $C_6^1, C_{12}^2$  dan  $C_6^3$  kecuali warna 2, maka semua lintasan dari titik  $v_{23}$  ke titik  $v_{34}$  bukan merupakan *rainbow path* karena pada lintasan tersebut terdapat warna yang sama pada sisi-sisinya dan jika sisi di  $E_2$  diberi warna 2 maka semua lintasan yang menghubungkan titik  $v_{23}$  ke titik  $v_{35}$  bukanlah *rainbow path*. Jadi haruslah sisi-sisi di  $E_2$  diberi pewarnaan yang berbeda dari pewarnaan sisi di  $C_6^1, C_{12}^2, C_6^3$  dan  $E_1$  yaitu 8 sedemikian sehingga terdapat 8 warna pada  $C_6^1, C_{12}^2, C_6^3, E_1$  dan  $E_2$ .

Dari langkah-langkah di atas, dapat dilihat bahwa dengan 7-coloring, graf  $C_{6,12,6}$  bukan merupakan graf yang *rainbow connected*. Jadi haruslah  $rc(C_{6,12,6}) > 7$  dengan kata lain  $rc(C_{6,12,6}) \geq 8$  agar setiap titiknya terhubung oleh *rainbow path*. Oleh karena itu,  $rc(C_{6,12,6}) = 8$ .  $\square$

### 3. Kesimpulan

Pada paper ini telah dibuktikan bahwa  $rc(C_{5,10,5}) = 7$  dan  $rc(C_{6,12,6}) = 8$ .

#### 4. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. Syafrizal Sy dan Dr. Effendi yang telah memberikan masukan dan saran, sehingga tulisan ini dapat diselesaikan dengan baik. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, dan Ibu Dr. Yanita sehingga paper ini dapat dipublikasikan.

#### Daftar Pustaka

- [1] Chartrand, G. dan P. Zhang, 2005. *Introduction to Graph Theory*, McGraw-Hill International Editions, Singapore.
- [2] Chartrand, G. dkk, 2006. *Rainbow Connection in Graphs*, Math. Bohem. **133**: 85 – 98.
- [3] Sy, S., G. Histamedika dan L. Yulianti, 2013. *Rainbow Connection Numbers of fan and sun*, Applied Mathematical Sciences. **7**: 3155 – 3159.
- [4] Li, X. dan Yuefang, S., 2012. *Rainbow Connection of Graphs*, Springer Briefs in Mathematics, New York.