

BATAS ATAS BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* UNTUK GRAF KUBIK $C_{n,2n,2n,2n,n}$

SUCIANA BUDI ARYANI, LYRA YULIANTI DAN SYAFRIZAL SY

*Program Studi Magister Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 email : suciana.budiaryani@gmail.com*

Abstrak. Misalkan G merupakan suatu graf terhubung tak trivial. Didefinisikan suatu pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}; n \in \mathbb{N}$, dimana sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Suatu lintasan $u - v$ path dikatakan sebagai *rainbow path* pada G jika tidak terdapat dua sisi pada *path* yang berwarna sama. Suatu graf G dikatakan *rainbow-connected* terhadap pewarnaan sisi, jika G memuat *rainbow $u-v$ path* untuk setiap dua titik u dan v pada G . Jika graf G bersifat *rainbow connected* maka pewarnaan sisinya dinamakan *rainbow coloring* pada G . Bilangan *rainbow connection* (*rc*) (*rainbow connection number*) dari G , dilambangkan dengan $rc(G)$, didefinisikan sebagai minimum banyaknya warna yang diberikan pada G sedemikian sehingga G merupakan *rainbow (rainbow connected)*. Suatu **Graf Kubik** $C_{n,2n,2n,2n,n}$ adalah suatu graf kubik yang dibentuk dari lima buah lingkaran dengan banyak titik lingkaran pertama sama dengan banyak titik lingkaran kelima yaitu sebanyak n dan lingkaran ke-dua, ke-tiga, dan keempat adalah sebanyak $2n$ dengan himpunan sisi E_i merupakan himpunan sisi yang menghubungkan lintasan ke- i dengan lingkaran ke- $i + 1$. Pada paper ini akan dibuktikan bahwa batas atas bilangan *Rainbow Connection* untuk Graf kubik $C_{5,10,10,10,5}$ adalah 11 dan Graf kubik $C_{6,12,12,12,6}$ adalah 14.

Kata Kunci: Graf kubik, graf *cycle*, bilangan *rainbow connection*

1. Pendahuluan

Salah satu konsep pewarnaan graf yang berkembang saat ini adalah penentuan bilangan *rainbow connection* (*rainbow connection number*). Konsep *rainbow connection* suatu graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand, Johns, McKeon dan Zhang pada tahun 2006. Suatu lintasan dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisinya yang memiliki warna sama. Suatu graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda dihubungkan oleh *rainbow path*. Dalam hal ini, pewarnaan graf G disebut *rainbow coloring*. Jika ada sebanyak k warna yang digunakan, maka pewarnaannya disebut *rainbow k -coloring*. Bilangan k disebut bilangan *rainbow connection* (*rainbow connection number*) dari graf terhubung G , dilambangkan dengan $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya minimum warna yang diperlukan untuk mewarnai sisi graf G sehingga graf tersebut bersifat *rainbow connected*.

Misalkan c adalah *rainbow coloring* dari graf terhubung G . Untuk setiap dua titik u dan v di G , suatu *rainbow $u-v$ geodesic* di G adalah lintasan *rainbow $u - v$* yang panjangnya $d_G(u, v)$, dimana $d_G(u, v)$ adalah jarak antara u dan v di G . Graf G disebut *strongly rainbow connected* jika memuat suatu *rainbow $u - v$ geodesic*

untuk setiap dua titik $u - v$ pada G . Dalam hal ini, pewarnaan c dinamakan *strong rainbow coloring* di G . Bilangan *strong rainbow connection* (*Strong rainbow connection number*) dari graf terhubung G , dilambangkan dengan $src(G)$, didefinisikan sebagai banyak minimum warna yang diperlukan untuk membuat G menjadi *strong rainbow connected*. Pada paper ini akan ditentukan batas atas Bilangan *Rainbow Connection* untuk Graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$.

2. Beberapa Konsep dalam Teori Graf

2.1. Bilangan Rainbow Connection

Berikut disajikan kembali proposisi yang membahas tentang graf G yang mempunyai $rc(G)$ dan $src(G)$ 1, 2 dan m .

Proposisi 2.1. [2] *Misalkan G adalah suatu graf terhubung tak trivial yang berukuran m . Maka*

- (1) $rc(G) = src(G) = 1$ jika dan hanya jika G merupakan graf lengkap,
- (2) $rc(G) = 2$ jika dan hanya jika $src(G) = 2$, dan
- (3) $rc(G) = src(G) = m$ jika dan hanya jika G suatu graf pohon.

Proposisi 2.2. [2] *Untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 4$, berlaku*

$$rc(C_n) = src(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

2.2. Graf Kubik

Graf kubik adalah graf regular dengan derajat setiap titik 3. Graf $C_{n_1, n_2, \dots, n_5}$ adalah suatu graf kubik yang dibentuk dari lima graf lingkaran ($C_{n_i}^i$) dengan $i = 1, 2, \dots, 5$, dimana $V(C_{n_i}^i) := \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in_i}\}$ adalah himpunan titik dari graf lingkaran ke- i yang mempunyai n_i titik. Jadi, himpunan titik dan himpunan sisi dari graf kubik $C_{n_1, n_2, \dots, n_5}$ adalah:

$$V(C_{n_1, n_2, \dots, n_5}) = \bigcup_{i=1}^5 V(C_{n_i}^i),$$

$$E(C_{n_1, n_2, \dots, n_5}) = \bigcup_{i=1}^5 E(C_{n_i}^i) \cup \bigcup_{j=1}^4 E_j.$$

dimana

$$E_1 = \{v_{(1j)}v_{2(2j-1)} \mid j = 1, \dots, n\},$$

$$E_2 = \{v_{2(j)}v_{3(j)} \mid j = 2, 4, \dots, 2n\},$$

$$E_3 = \{v_{3(j)}v_{4(j)} \mid j = 1, 3, \dots, 2n-1\},$$

$$E_4 = \{v_{4(j)}v_{5(j/2)} \mid j = 2, 4, \dots, 2n\}.$$

3. Batas Atas Bilangan *Rainbow Connection* untuk $C_{5,10,10,10,5}$ dan $C_{6,12,12,12,6}$

Pada tulisan ini akan ditentukan batas atas bilangan *rainbow connection* dari graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ untuk $n = 5$ dan $n = 6$.

Teorema 3.1. $\diamond$ Misalkan terdapat graf kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$ untuk $n = 5$ dan $n = 6$. Maka

$$rc(C_{n,2n,2n,2n,n}) \leq \begin{cases} 11, & \text{untuk } n = 5, \\ 14, & \text{untuk } n = 6. \end{cases}$$

Bukti.

(A) **Kasus 1.** Untuk $n = 5$.

Akan ditunjukkan bahwa $rc(C_{5,10,10,10,5}) \leq 11$. Definisikan pewarnaan sisi dari masing-masing lingkaran sebagai berikut.

(1) Pewarnaan sisi-sisi dari C_5^1 adalah

$$c(v_{1j}v_{1j+1}) = \begin{cases} j, & \text{untuk } 1 \leq j \leq k+1, \\ j-k-1, & \text{untuk } k+2 \leq j \leq 4. \end{cases}$$

$$c(v_{1j}v_{11}) = j-k-1, \text{ untuk } j = 5.$$

(2) Pewarnaan sisi untuk C_{10}^2 adalah

$$c(v_{2j}v_{2(j+1)}) = \begin{cases} j, & \text{untuk } 1 \leq j < \lceil 5/2 \rceil \text{ atau untuk } \lceil 5/2 \rceil < j \leq 5, \\ 11, & \text{untuk } j = \lceil 5/2 \rceil \text{ atau untuk } j = 10 - \lfloor 5/2 \rfloor, \\ j-5, & \text{untuk } 5+1 \leq j < 10 - \lfloor 5/2 \rfloor \text{ atau untuk } 10 - \lfloor 5/2 \rfloor < j \leq 9. \end{cases}$$

$$c(v_{2j}v_{21}) = j-5, \text{ untuk } j = 10.$$

(3) Pewarnaan sisi-sisi dari C_{10}^3 adalah

$$c(v_{3j}v_{3(j+1)}) = \begin{cases} 6-j, & \text{untuk } 1 \leq j \leq 5, \\ 11-j, & \text{untuk } 6 \leq j \leq 9. \end{cases}$$

$$c(v_{3j}v_{31}) = 11-j, \text{ untuk } j = 10.$$

(4) Pewarnaan sisi untuk C_{10}^4 adalah

$$c(v_{4j}v_{4(j+1)}) = \begin{cases} j, & \text{untuk } 1 \leq j < \lceil 5/2 \rceil \text{ atau untuk } \lceil 5/2 \rceil < j \leq 5, \\ 11, & \text{untuk } j = \lceil 5/2 \rceil \text{ atau untuk } j = 10 - \lfloor 5/2 \rfloor, \\ j-5, & \text{untuk } 6 \leq j < 10 - \lfloor 5/2 \rfloor \text{ atau untuk } 10 - \lfloor 5/2 \rfloor < j \leq 9. \end{cases}$$

$$c(v_{4j}v_{41}) = j-5, \text{ untuk } j = 10.$$

(5) Pewarnaan sisi-sisi dari C_5^5 adalah

$$c(v_{5j}v_{5(j+1)}) = \begin{cases} j, & \text{untuk } 1 \leq j \leq k+1, \\ j-k-1, & \text{untuk } k+2 \leq j \leq 4. \end{cases}$$

$$c(v_{5j}v_{51}) = j-k-1, \text{ untuk } j = 5.$$

(6) Pewarnaan sisi untuk E_1, E_2, E_3 dan E_4 adalah sebagai berikut. Semua sisi di E_1 diberikan warna 6, semua sisi di E_2 berwarna 7, semua sisi E_3 berwarna 8, dan sisi-sisi di E_4 berwarna 9.

Dari definisi tersebut diperoleh bahwa untuk setiap dua titik di graf $C_{5,10,10,10,5}$ terdapat lintasan rainbow di antara keduanya. Sehingga diperoleh bahwa $rc(C_{5,10,10,10,5}) \leq 11$.

(B) **Kasus 2.** Untuk $n = 6$.

Akan ditunjukkan bahwa $rc(C_{6,12,12,12,6}) \leq 14$. Definisikan pewarnaan sisi graf $C_{6,12,12,12,6}$ sebagai berikut.

(1) Pewarnaan sisi untuk C_6^1 adalah

$$c(v_{1j}v_{1j+1}) = \begin{cases} j, & \text{untuk } 1 \leq j \leq k, \\ j - k, & \text{untuk } k + 1 \leq j \leq 5. \end{cases}$$

$$c(v_{1j}v_{11}) = j - k, \text{ untuk } j = 6.$$

(2) Pewarnaan sisi untuk C_{12}^2 adalah

$$c(v_{2j}v_{2(j+1)}) = \begin{cases} 10 + c(v_{1l}v_{1(l+1)}), & \text{untuk } j = 1, 3 \text{ atau untuk } j = 7, 8, 9, \text{ dimana } j = 2l - 1, \\ j, & \text{untuk } j = 2 \text{ atau untuk } 4 \leq j \leq 6, \\ j - 6, & \text{untuk } j = 8, 10 \text{ atau untuk } 10 \leq j \leq 11, \end{cases}$$

$$c(v_{2j}v_{21}) = j - 6, \text{ untuk } j = 12.$$

(3) Pewarnaan sisi untuk C_{12}^3 adalah

$$c(v_{3j}v_{3(j+1)}) = \begin{cases} 7 - j, & \text{untuk } 1 \leq j \leq 6, \\ 13 - j, & \text{untuk } 7 \leq j \leq 11. \end{cases}$$

$$c(v_{3j}v_{31}) = 7 - j, \text{ untuk } j = 12.$$

(4) Pewarnaan sisi untuk C_{12}^4 adalah

$$c(v_{4j}v_{4(j+1)}) = \begin{cases} 12 + c(v_{1l}v_{1l+1}), & \text{untuk } j = 1, 3 \text{ atau untuk } j = 7, 8, 9, \text{ dimana } j = 2l - 1, \\ j, & \text{untuk } j = 2, 4 \text{ atau untuk } 4 \leq j \leq 6, \\ j - 6, & \text{untuk } j = 8, 10 \text{ atau untuk } 10 \leq j \leq 11, \end{cases}$$

$$c(v_{4j}v_{41}) = j - 6, \text{ untuk } j = 12.$$

(5) Pewarnaan sisi untuk C_6^5 adalah

$$c(v_{5j}v_{5j+1}) = \begin{cases} j, & \text{untuk } 1 \leq j \leq k, \\ j - k, & \text{untuk } k + 1 \leq j \leq 5. \end{cases}$$

$$c(v_{5j}v_{51}) = j - k, \text{ untuk } j = 6.$$

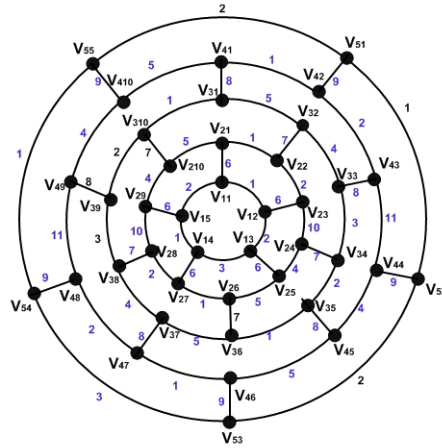
(6) Pewarnaan sisi untuk E_1 , E_2 , E_3 dan E_4 adalah sebagai berikut. Semua sisi di E_1 diberikan warna 7, semua sisi di E_2 berwarna 8, semua sisi E_3 berwarna 9, dan sisi-sisi di E_4 berwarna 10.

Dari definisi tersebut, diperoleh bahwa pewarnaan tersebut menggunakan 14 warna, sehingga diperoleh $rc(C_{6,12,12,12,6}) \leq 14$. $\square$

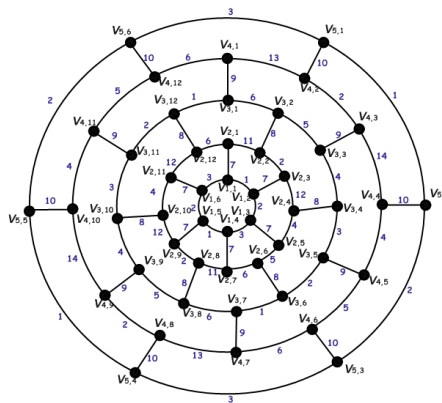
Pada Gambar 1 dan Gambar 2 diberikan pewarnaan *rainbow* terhadap graf $C_{5,10,10,10,5}$ dan $C_{6,12,12,12,6}$.

4. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah diperoleh batas atas bilangan *rainbow connection* untuk graf kubik $C_{5,10,10,10,5}$ dan $C_{6,12,12,12,6}$.



Gambar 1. Pewarnaan dengan 11 warna untuk graf kubik $C_{5,10,10,10,5}$



Gambar 2. Pewarnaan dengan 14 warna untuk graf kubik $C_{6,12,12,12,6}$

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan dan Bapak Dr. Effendi yang telah memberikan bimbingan, masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Chartrand, G. dan P. Zhang, 2005. *Introduction to Graph Theory*, McGraw-Hill International Editions, Singapore.
- [2] Chartrand, G. dkk, 2008. Rainbow Connection in Graphs, *Math. Bohem.* 133 : 85 – 98.
- [3] Sy, S., Histamedika, G., dan Yulianti, L., 2013. Rainbow Connection Numbers of Fan and Sun, *Applied Mathematical Science*. 7: 3155 – 3159.

- [4] Li, X. dan Y. Sun. 2012. *Rainbow Connections of Graphs*. Springer Briefs in Mathematics. Springer. New York.