Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **2** Hal. 10 – 16
ISSN : 2303–291X

SOLUSI DARI SISTEM PERSAMAAN LINIER $A\mathrm{x} = \mathrm{b}$ DI $\mathbb{Z}_2^2$ DENGAN A DI $M_2(\mathbb{Z}_2)$

AIDIL ADRIANDA AFRIZAL, YANITA, ADMI NAZRA

Jurusan Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email: adriandaaidil@gmail.com

Abstrak. Tulisan ini membahas tentang sistem persamaan linier khusus, yaitu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan $A \in M_2(\mathbb{Z}_2)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^2$, dan $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}_2^2$. Solusi yang didapatkan adalah berupa solusi tunggal, solusi banyak, dan tidak mempunyai solusi. Solusi ini terkait dengan matriks $A \in M_2(\mathbb{Z}_2)$.

Kata Kunci: Sistem persamaan linier, solusi dari sistem persamaan linier, $M_2(\mathbb{Z}_2)$, $\mathbb{Z}_2^2$

1. Pendahuluan

Sistem persamaan linier merupakan sistem dalam bentuk $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan A adalah matriks koefisien, $\mathbf{b}$ adalah matriks konstan, dan $\mathbf{x}$ adalah solusi dari sistem persamaan linier tersebut.

Dalam tulisan ini bentuk dari sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ diberikan khusus, yaitu $A \in M_2(\mathbb{Z}_2)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^2$. $\mathbb{Z}_2$ adalah himpunan bilangan-bilangan modulo 2 dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian, ditulis $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. $M_2(\mathbb{Z}_2)$ adalah himpunan matriks-matriks berukuran 2×2 dengan entri-entri di $\mathbb{Z}_2$. Adapun unsur-unsur dari $M_2(\mathbb{Z}_2)$ adalah $\{\begin{bmatrix}\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{0}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{1}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{0}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{0}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{0}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\bar{1}&\bar{1}\\\bar{1}&\bar{1}\end{bmatrix}\}$. Pada penelitian ini, akan ditentukan bentuk-bentuk solusi dari sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan $A \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ dan $x, b \in \mathbb{Z}_2^2$.

2. Sistem Persamaan Linier

Definisi 2.1. *[2] Persamaan linier adalah persamaan yang mempunyai bentuk $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b$, dengan a_1, a_2, $\cdots$, a_n, b elemen dari lapangan F dan x_1, $\cdots$, x_n disebut variabel. Skalar a_j disebut koefisien dan b disebut dengan konstan. Suatu sistem persamaan linier atau sistem linier adalah himpunan dari satu atau lebih persamaan linier yang mempunyai variabel-variabel yang sama, sedemikian sehingga:*

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Solusi dari sistem ini adalah $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ dengan $c_j = x_j$, untuk setiap j yang memenuhi setiap persamaan. Himpunan solusi dari sistem ini adalah himpunan dari semua solusi-solusi. Suatu sistem disebut konsisten, jika terdapat setidaknya satu solusi, jika tidak maka sistem tidak konsisten.

Teorema 2.2. *[1] Setiap sistem persamaan linear memiliki salah satu dari tiga kemungkinan berikut ini, yaitu: tidak memiliki solusi, tepat satu solusi, atau tak hingga banyaknya solusi.*

Teorema 2.3. *[1] Jika $A_{n\times n}$ yang dapat dibalik, maka untuk setiap matriks $\boldsymbol{b}_{n\times 1}$, sistem persamaan $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ memiliki tepat satu solusi, yaitu $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.*

Definisi 2.4. *[1] Suatu sistem persamaan linier disebut homogen jika semua suku konstanya adalah 0; yaitu sistem ini memiliki bentuk*

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

Setiap sistem persamaan linier homogen selalu konsisten, karena semua sistem semacam ini setidaknya memiliki solusi $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\cdots$, $x_n = 0$ yang disebut solusi trivial. Jika terdapat solusi lain, maka solusi-solusi tersebut disebut solusi nontrivial.

3. SOLUSI DARI SISTEM PERSAMAAN LINIER $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ DI $\mathbb{Z}_2^2$ DENGAN A DI $M_2(\mathbb{Z}_2)$

Pada kajian di aljabar abstrak, diketahui bahwa $\mathbb{Z}_2$ merupakan suatu lapangan. Oleh karena itu $\mathbb{Z}_2^2$ menyatakan himpunan vektor-vektor (x, y) dengan x, y $\in \mathbb{Z}_2$ atau $\mathbb{Z}_2^2 = \left\{ \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{bmatrix} | x, y \in \mathbb{Z}_2 \right\}$. Oleh karena $\mathbb{Z}_2$ adalah himpunan hingga maka dapat ditulis $\mathbb{Z}_2^2 = \left\{ \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \right\}$.

Untuk sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan A adalah matriks yang dapat dibalik, solusi dapat ditentukan berdasarkan Teorema 2.2.2.

Misalkan $D_1 = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{0} \end{bmatrix}$, $D_2 = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \end{bmatrix}$, $D_3 = \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \end{bmatrix}$, dan $D_4 = \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix}$, maka akan diperoleh beberapa sifat berikut ini:

Proposisi 3.1. *Sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dengan $A \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}_2^2$, tidak mempunyai solusi untuk $\boldsymbol{b} = D_2 = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \end{bmatrix}$, jika :*

(1) matriks $A = \begin{bmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$, untuk setiap $\overline{a_1}$, $\overline{a_2} \in \mathbb{Z}_2$.

(2) matriks $A = \begin{bmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{a_1} & \overline{a_2} \end{bmatrix}$, *untuk setiap* $\overline{a_1}, \overline{a_2} \in \mathbb{Z}_2$.

Bukti. Misalkan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix}$, untuk suatu $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in \mathbb{Z}_2$ dan $\mathbf{b} = D_2 = \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \end{bmatrix}$.

(1) Jika $A = \begin{bmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$ dan $\overline{a_1}, \overline{a_2} \in \mathbb{Z}_2$ sebarang, Akan dibuktikan bahwa sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai solusi.
Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \begin{bmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{a_1}\ \overline{x_1} + \overline{a_2}\ \overline{x_2} \\ \overline{0}\overline{x_1} + \overline{0}\overline{x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{a_1 x_1} + \overline{a_2 x_2} \\ \overline{0x_1} + \overline{0x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{a_1 x_1} + \overline{a_2 x_2} \\ \overline{0} + \overline{0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{a_1 x_1} + \overline{a_2 x_2} \\ \overline{0 + 0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{a_1 x_1} + \overline{a_2 x_2} \\ \overline{0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} \overline{a_1 x_1} + \overline{a_2 x_2} &= \overline{0} \\ \overline{0} &= \overline{1} \end{aligned}$$

Karena terdapat persamaan $\overline{0} = \overline{1}$ maka hasil yang diperoleh tidak konsisten. Maka terbukti bahwa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai solusi.

(2) Jika $A = \begin{bmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{a_1} & \overline{a_2} \end{bmatrix}$ dan $\overline{a_1}, \overline{a_2} \in \mathbb{Z}_2$ sebarang, Akan dibuktikan bahwa sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai solusi.
Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \begin{bmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{a_1} & \overline{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{a_1}\ \overline{x_1} + \overline{a_2}\ \overline{x_2} \\ \overline{a_1}\ \overline{x_1} + \overline{a_2}\ \overline{x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{a_1 x_1} + \overline{a_2 x_2} \\ \overline{a_1 x_1} + \overline{a_2 x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}\overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2} &= \overline{0}\\ \overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2} &= \overline{1}\end{aligned}$$

Hasil tidak konsisten, karena terdapat persamaan $\overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2} = \overline{0}$ dan $\overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2} = \overline{1}$ yang mengakibatkan $\overline{0} = \overline{1}$, sehingga tidak terdapat skalar-skalar $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_2$ yang memenuhi sistem persamaan linier

$$\begin{bmatrix}\overline{a_1} & \overline{a_2}\\ \overline{a_1} & \overline{a_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x_1}\\ \overline{x_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{0}\\ \overline{1}\end{bmatrix}.$$

Maka terbukti bahwa sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai solusi. $\square$

Proposisi 3.2. *Sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dengan $A \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}_2^2$, tidak mempunyai solusi untuk $\boldsymbol{b} = D_3 = \begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{0}\end{bmatrix}$, jika :*

(1) matriks $A = \begin{bmatrix}\overline{0} & \overline{0}\\ \overline{a_1} & \overline{a_2}\end{bmatrix}$, untuk setiap $\overline{a_1}$, $\overline{a_2} \in \mathbb{Z}_2$.

(2) matriks $A = \begin{bmatrix}\overline{a_1} & \overline{a_2}\\ \overline{a_1} & \overline{a_2}\end{bmatrix}$, untuk setiap $\overline{a_1}$, $\overline{a_2} \in \mathbb{Z}_2$.

Bukti. Misalkan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}\overline{x_1}\\ \overline{x_2}\end{bmatrix}$, untuk suatu $\overline{x_1}$, $\overline{x_2} \in \mathbb{Z}_2$ dan $\mathbf{b} = D_3 = \begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{0}\end{bmatrix}$.

(1) Jika $A = \begin{bmatrix}\overline{a_1} & \overline{a_2}\\ \overline{0} & \overline{0}\end{bmatrix}$ dan $\overline{a_1}$, $\overline{a_2} \in \mathbb{Z}_2$ sebarang, Akan dibuktikan bahwa sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai solusi.
Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \mathbf{b}\\
\begin{bmatrix}\overline{0} & \overline{0}\\ \overline{a_1} & \overline{a_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x_1}\\ \overline{x_2}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{0}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\overline{0}\,\overline{x_1} + \overline{0}\,\overline{x_2}\\ \overline{a_1}\ \overline{x_1} + \overline{a_2}\ \overline{x_2}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{0}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\overline{0x_1} + \overline{0x_2}\\ \overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{0}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\overline{0} + \overline{0}\\ \overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{0}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\overline{0 + 0}\\ \overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{0}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\overline{0}\\ \overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\overline{1}\\ \overline{0}\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}\overline{0} &= \overline{1}\\ \overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2} &= \overline{0}\end{aligned}$$

Karena terdapat persamaan $\overline{0} = \overline{1}$, sehingga hasil yang diperoleh tidak konsisten. Maka terbukti bahwa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai solusi.

(2) Jika $A = \begin{bmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{a_1} & \overline{a_2} \end{bmatrix}$ dan $\overline{a_1}$, $\overline{a_2} \in \mathbb{Z}_2$ sebarang, Akan dibuktikan bahwa sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai solusi.
Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \begin{bmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{a_1} & \overline{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{a_1}\ \overline{x_1} + \overline{a_2}\ \overline{x_2} \\ \overline{a_1}\ \overline{x_1} + \overline{a_2}\ \overline{x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \overline{a_1 x_1} + \overline{a_2 x_2} \\ \overline{a_1 x_1} + \overline{a_2 x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Diperoleh

$$\begin{aligned} \overline{a_1 x_1} + \overline{a_2 x_2} &= \overline{1} \\ \overline{a_1 x_1} + \overline{a_2 x_2} &= \overline{0} \end{aligned}$$

Hasil tidak konsisten, karena terdapat persamaan $\overline{a_1 x_1} + \overline{a_2 x_2} = \overline{1}$ dan $\overline{a_1 x_1} + \overline{a_2 x_2} = \overline{0}$ yang mengakibatkan $\overline{1} = \overline{0}$, sehingga tidak terdapat skalar-skalar yang memenuhi sistem persamaan linier

$$\begin{bmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{a_1} & \overline{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{0} \end{bmatrix}.$$

Maka terbukti bahwa sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai solusi. □

Proposisi 3.3. *Sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dengan $A \in M_2(\mathbb{Z}_2)$ dan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}_2^2$, tidak mempunyai solusi untuk $\boldsymbol{b} = D_4 = \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix}$, jika :*

(1) matriks $A = \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{a_1} & \overline{a_2} \end{bmatrix}$, untuk setiap $\overline{a_1}$, $\overline{a_2} \in \mathbb{Z}_2$.

(2) matriks $A = \begin{bmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$, untuk setiap $\overline{a_1}$, $\overline{a_2} \in \mathbb{Z}_2$.

Bukti. Misalkan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix}$, untuk suatu $\overline{x_1}$, $\overline{x_2} \in \mathbb{Z}_2$ dan $\mathbf{b} = D_4 = \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix}$.

(1) Jika $A = \begin{bmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$ dan $\overline{a_1}$, $\overline{a_2} \in \mathbb{Z}_2$ sebarang, Akan dibuktikan bahwa sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai solusi.

Perhatikan bahwa :

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{a_1} & \overline{a_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \overline{0}\overline{x_1} + \overline{0}\overline{x_2} \\ \overline{a_1}\ \overline{x_1} + \overline{a_2}\ \overline{x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \overline{0x_1} + \overline{0x_2} \\ \overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \overline{0} + \overline{0} \\ \overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \overline{0+0} \\ \overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \overline{0} \\ \overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Diperoleh

$$
\begin{aligned}
\overline{0} &= \overline{1} \\
\overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2} &= \overline{1}
\end{aligned}
$$

Karena terdapat persamaan $\overline{0} = \overline{1}$, sehingga hasil yang diperoleh tidak konsisten. Maka terbukti bahwa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai solusi.

(2) Jika $A = \begin{bmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix}$ dan $\overline{a_1}$, $\overline{a_2} \in \mathbb{Z}_2$ sebarang, Akan dibuktikan bahwa sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai solusi.
Perhatikan bahwa :

$$
\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\begin{bmatrix} \overline{a_1} & \overline{a_2} \\ \overline{0} & \overline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \overline{a_1}\ \overline{x_1} + \overline{a_2}\ \overline{x_2} \\ \overline{0}\overline{x_1} + \overline{0}\overline{x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2} \\ \overline{0x_1} + \overline{0x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2} \\ \overline{0} + \overline{0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2} \\ \overline{0+0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2} \\ \overline{0} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \overline{1} \\ \overline{1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Diperoleh

$$
\begin{aligned}
\overline{a_1x_1} + \overline{a_2x_2} &= \overline{1} \\
\overline{0} &= \overline{1}
\end{aligned}
$$

Karena terdapat persamaan $\overline{0} = \overline{1}$ maka hasil yang diperoleh tidak konsisten. Maka terbukti bahwa $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tidak mempunyai solusi. $\square$

Selanjutnya, sistem persamaan linier $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mempunyai solusi banyak bila A tidak dapat dibalik dan sifat-sifat diatas tidak terpenuhi.

4. Kesimpulan

$\mathbb{Z}_2$ adalah himpunan bilangan-bilangan modulo 2 dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian, ditulis $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$. $M_2(\mathbb{Z}_2)$ adalah himpunan matriks-matriks berukuran 2×2 dengan entri-entri di $\mathbb{Z}_2$.Dari pembahasan yang telah dilakukan diperoleh kesimpulan sistem persamaan linier khusus yaitu $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dengan $A \in M_2(\mathbb{Z}_2)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_2^2$, dan $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}_2^2$ mempunyai bentuk solusi tunggal, solusi banyak dan tidak mempunyai solusi.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Lyra Yulianti, Ibu Noliza Bakar dan Bapak Muhafzan yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer*, edisi ke-8. Erlangga, Jakarta.
[2] Heesterman, A. R. 1990. *Handbook of Linear Algebra*. Chapman & Hall/CRC, New York.
[3] Herstein, I. N. 1975. *Topics in Algebra*. 2^{nd} Edition. John Wiley and Sons, New York.
[4] Jocob, Bill. 1990. *Linear Algebra*. W. H. Freeman and Company, New York.