Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **2** Hal. 70 – 75
ISSN : 2303–291X

DIMENSI PARTISI DARI GRAF PERSAHABATAN

GILANG ARYA LIZA
Jurusan Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : gilank.praksos@gmail.com

Abstrak. Dimensi partisi diperkenalkan pertama kali oleh Chartrand, Salehi dan Zhang [2] pada tahun 1998. Dimensi partisi merupakan pengelompokan semua titik di G ke dalam sejumlah kelas partisi dan menentukan jarak setiap titik terhadap setiap kelas partisi tersebut [2] dan dinotasikan sebagai $pd(G)$ untuk graf terhubung. Pemilihan representasi yang tepat menghasilkan suatu representasi dimana semua titiknya memiliki vektor koordinat yang berbeda. Pada tulisan ini, akan dibahas kembali makalah [4] tentang cara penentuan dimensi partisi dari graf persahabatan. Graf persahabatan adalah graf lengkap K_2 yang digandakan sebanyak n kali dan dihubungkan dengan sebuah titik dari K_1. Akibatnya semua titik di K_2 akan terhubung dengan titik di K_1. Titik di K_1 pada graf persahabatan disebut dengan titik pusat c. Graf persahabatan dapat dinotasikan dengan f_n.

Kata Kunci: Dimensi partisi, representasi, graf persahabatan

1. Pendahuluan

Graf adalah pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pada dasarnya, graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada dengan tujuan supaya penggambaran objek-objek tersebut lebih mudah dipahami dan dimengerti. Beberapa contoh yang digunakan dalam kehidupan sehari-hari adalah jaringan pertemanan instagram, peta rangkaian listrik, bagan air dan lain-lain.

Kemudian, yang perlu diperhatikan yaitu istilah partisi. Partisi merupakan pembagian beberapa kelompok atau kelas suatu graf. Representasi dikenalkan secara terpisah oleh Slater (1975) dan dikenalkan juga oleh Harary dan Melter (1975) kemudian digunakan oleh seorang kimiawan pada sebuah perusahaan farmasi Johnson (1993). Konsepnya yaitu senyawa kimia tersebut direpresentasikan secara unik sebagai objek dari matematika. Selanjutnya dalam [1] juga dikatakan bahwa klasifikasi senyawa kimia dilakukan dengan mempelajari dan mengklasifikasi objek matematika tersebut. Senyawa kimia tersebut direpresentasikan dalam bentuk graf dengan simpul graf menyatakan atom dan sisi graf menyatakan ikatan valensi antara dua atom.

Selanjutnya, Chartrand dkk. [2] pada paper pertama tentang dimensi partisi menunjukkan dimensi partisi graf bintang ganda T dan memberikan batas atas dan batas bawah tentang dimensi partisi graf ulat (*caterpillar*). Selanjutnya pada makalah yang sama juga diperoleh bahwa graf G mempunyai $pd(G) = n$ jika dan hanya jika $G \cong K_n$, serta graf G mempunyai $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika G

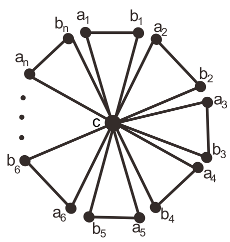
adalah graf lintasan P_n.

Pengenalan konsep partisi pembeda telah dinyatakan oleh Chartrand dkk. [2] yang merupakan bentuk serupa dari himpunan pembeda dari suatu graf. Chartrand dkk. [2] menyatakan bahwa dalam merepresentasikan setiap titik pada suatu graf G, yang harus dilakukan yaitu mengelompokkan titik di graf G ke dalam sejumlah kelas partisi kemudian hitung jarak tersebut ke setiap titik di G.

Oleh karena itu, dalam makalah ini akan dikaji kembali makalah [4] tentang penentuan dimensi partisi dari graf persahabatan f_n untuk $n \geq 1$. Graf persahabatan adalah graf lengkap K_2 yang digandakan sebanyak n kali dengan menghubungkan semua titik dari graf nK_2 dengan suatu titik di K_1. Untuk selanjutnya, titik K_1 disebut titik pusat c.

2. Dimensi Partisi Dari Graf Persahabatan

Pada bab ini akan dibahas mengenai dimensi partisi dari graf persahabatan f_n, seperti yang telah dibahas pada disertasi Darmaji [4]. Graf persahabatan f_n adalah graf yang mempunyai n buah pasang titik yang masing-masing disimbolkan dengan a_i dan b_i dengan $1 \leq i \leq n$. Pada Gambar 1 adalah bentuk dari graf persahabatan f_n.



Gambar 1. Graf Persahabatan f_n

Di bawah ini akan dipaparkan mengenai lema dan teorema yang mendukung dalam penulisan makalah ini.

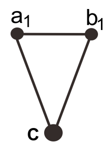
Lema 2.1. [4] *Misalkan terdapat suatu partisi pembeda* Π *untuk graf persahabatan* f_n *dengan* $n \geq 1$ *dengan himpunan titik* $V(f_n) = \{c, a_i, b_i | i = 1, 2, \cdots, n\}$ *dan terdapat himpunan sisi* $E(f_n) = \{ca_i, a_ib_i, c_ib_i | i = 1, 2, \cdots, n\}$. *Maka titik* a_i *dan* b_i *harus termuat dalam kelas partisi berbeda di* Π.

Lema 2.2. [4] *Misalkan terdapat suatu partisi pembeda* Π *untuk graf persahabatan* f_n , $n \geq 1$ *dimana terdapat himpunan titik* $V(f_n) = \{c, a_i, b_i | i = 1, 2, \cdots, n\}$ *dan himpunan sisi* $E(f_n) = \{ca_i, a_ib_i, c_ib_i | i = 1, 2, \cdots, n\}$. *Misalkan* S_x *adalah sebuah kelas partisi di* Π *yang memuat* x. *Jika untuk setiap* i, *didefinisikan* $L_i = \{u, v\}$, *sedemikian hingga titik* $a_i \in S_u$ *dan titik* $b_i \in S_v$, *maka* $L_i \neq L_j$ *untuk* $i \neq j$.

Teorema 2.3. [1] *Dimensi partisi sebuah graf persahabatan* f_n *adalah* k, *dengan* k *merupakan bilangan bulat terkecil sedemikian hingga* $\binom{k}{2} \geq n$.

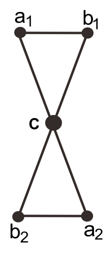
Bukti. Untuk setiap $i = 1, 2, \cdots, n$, misalkan $\{a_i, b_i\}$ adalah dua titik bertetangga di graf f_n. Misalkan terdapat suatu partisi pembeda Π untuk graf persahabatan f_n. Berdasarkan Lema 2.1 dan Lema 2.2, titik a_i dan b_i harus termuat dalam kelas partisi berbeda di Π, dan $L_i \neq L_j$ untuk $i \neq j$. Definisi untuk L_i mengikuti yang terdapat di Lema 2.1 dan 2.2. Oleh karena itu, jumlah kelas partisi di Π sedikitnya k buah kelas partisi, dengan k merupakan bilangan bulat terkecil yang memenuhi $\binom{k}{2} \geq n$. Dengan demikian, $pd(f_n) \geq k$. Sekarang akan ditunjukkan bahwa $pd(f_n) \leq k$. Pandang suatu partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ yang diperoleh dengan menandai $L_i,\ i = 1, 2, \cdots, n)$ dengan kombinasi-2 dari $\{1, 2, \cdots, k\}$ sedemikian hingga $L_i \neq Lj$ dimana titik $i \neq j$, dan andaikan $c \in S_1$. Karena representasi $r(v|\Pi)$ adalah unik untuk setiap $v \in V(f_n)$, maka Π adalah suatu partisi pembeda dari graf f_n. Dengan demikian, $pd(f_n) \leq k$, dengan k bilangan bulat terkecil sedemikian hingga $\binom{k}{2} \geq n$.

(Kasus 1) Misalkan terdapat graf persahabatan f_n dengan $n \geq 1$, akan ditentukan dimensi partisi graf persahabatan f_1. Misalkan $i = 1$. Dalam hal ini, terdapat titik-titik $V(f_1) = \{c, a_1, b_1\}$ dan terdapat sisi $E(f_1) = \{ca_1, cb_1, a_1b_1\}$.



Gambar 2. Graf Persahabatan f_1

(Kasus 2) Misalkan terdapat graf persahabatan f_n dengan $n \geq 1$, akan ditentukan dimensi partisi dari graf persahabatan f_2. Misalkan $i = 1, 2$. Dalam hal ini, terdapat titik-titik $V(f_2) = \{c, a_1, b_1, a_2, b_2\}$ dan terdapat sisi $E(f_2) = \{ca_1, cb_1, a_1b_1, ca_2, cb_2, a_2b_2\}$.



Gambar 3. Graf Persahabatan f_2

SubKasus 2.1 Misalkan $pd(f_2) = 2$.
Himpunan partisi graf f_2 dapat didefinisikan sebagai $\Pi_1 = \{S_1, S_2\}$, dengan

$$S_1 = \{a_1, b_2, c\},$$
$$S_2 = \{b_1, a_2\}.$$

Diperoleh representasi di semua titik dari f_2 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r(a_1 \mid \Pi_1) &= (0,1), \\ r(b_2 \mid \Pi_1) &= (0,1), \\ r(c \mid \Pi_1) &= (0,1), \\ r(b_1 \mid \Pi_1) &= (1,0), \\ r(a_2 \mid \Pi_1) &= (1,0). \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi diatas, akan terlihat bahwa nilai representasi dari a_1, b_2 dan c bernilai sama yaitu $(0,1)$ serta b_1 dan a_2 juga bernilai sama yaitu $(1,0)$.

SubKasus 2.2 Misalkan $pd(f_2) = 3$.

Himpunan partisi graf f_2 dapat didefinisikan sebagai $\Pi_2 = \{S_1, S_2, S_3\}$, dengan

$$\begin{aligned} S_1 &= \{a_1, c\}, \\ S_2 &= \{b_1, a_2\}, \\ S_3 &= \{b_2\}. \end{aligned}$$

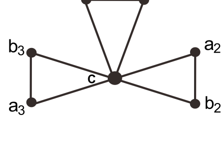
Diperoleh representasi di semua titik dari f_2 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} r(a_1 \mid \Pi_2) &= (0,1,2), \\ r(c \mid \Pi_2) &= (0,1,1), \\ r(b_1 \mid \Pi_2) &= (1,0,2), \\ r(a_2 \mid \Pi_2) &= (1,0,1), \\ r(b_2 \mid \Pi_2) &= (1,1,0). \end{aligned}$$

Berdasarkan representasi diatas, akan terlihat bahwa nilai representasi dari a_1, c, b_1, a_2, b_2 semuanya bernilai berbeda.

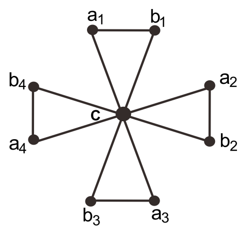
Berdasarkan hasil dari uraian diatas, akan terlihat bahwa dimensi partisi graf persahabatan f_1 yaitu $pd(f_1) = 3$, karena $\binom{3}{2} = 3 \geq 2$. Sehingga jumlah kelas partisi Π sedikitnya adalah 3.

(Kasus 3) Misalkan dimensi partisi graf persahabatan f_n dengan $n \geq 1$, akan ditunjukkan bilangan bulat terkecil dari graf persahabatan f_3. Misalkan $i = 1, 2, 3$. Dalam hal ini, terdapat titik-titik $V(f_3) = \{c, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3\}$ dan terdapat sisi $E(f_3) = \{ca_1, cb_1, a_1b_1, ca_2, cb_2, a_2b_2, ca_3, cb_3, a_3b_3\}$.



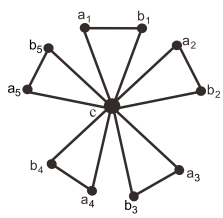
Gambar 4. Graf Persahabatan f_3

(Kasus 4) Misalkan dimensi partisi graf persahabatan f_n dengan $n \geq 1$, bilangan bulat terkecil dari graf persahabatan f_4. Misalkan $i = 1, 2, 3, 4$. Dalam hal ini, terdapat titik $V(f_4) = \{c, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4\}$ dan sisi-sisi $E(f_4) = \{ca_1, cb_1, a_1b_1, ca_2, cb_2, a_2b_2, ca_3, cb_3, a_3b_3, ca_4, cb_4, a_4b_4\}$.



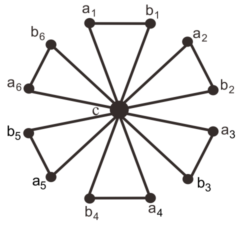
Gambar 5. Graf Persahabatan f_4

(Kasus 5) Misalkan graf persahabatan f_n dengan $n \geq 1$, akan ditunjukkan bilangan bulat terkecil dari graf persahabatan f_5. Misalkan $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Dalam hal ini, titik $V(f_5) = \{c, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5\}$ sisi $E(f_5) = \{ca_1, cb_1, a_1b_1, ca_2, cb_2, a_2b_2, ca_3, cb_3, a_3b_3, ca_4, cb_4, a_4b_4, ca_5, cb_5, a_5b_5\}$.



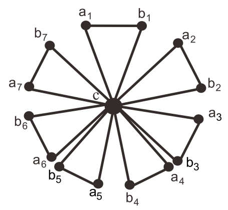
Gambar 6. Graf Persahabatan f_5

(Kasus 6) Misalkan dimensi partisi graf persahabatan f_n dengan $n \geq 1$, akan ditunjukkan bilangan bulat terkecil dari graf persahabatan f_6. Misalkan $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. $V(f_5) = \{c, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5, a_6, b_6\}$, $E(f_5) = \{ca_1, cb_1, a_1b_1, ca_2, cb_2, a_2b_2, ca_3, cb_3, a_3b_3, ca_4, cb_4, a_4b_4, cb_5, a_5b_5, cb_6, a_6b_6\}$.



Gambar 7. Graf Persahabatan f_6

(Kasus 7) Misalkan dimensi partisi graf persahabatan f_n dengan $n \geq 1$, akan ditunjukkan bilangan bulat terkecil dari graf persahabatan f_7. Misalkan $i = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Dalam hal ini, terdapat titik-titik $V(f_7) = \{c, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5, a_6, b_6, a_7, b_7\}$ dan Sisi-sisi $E(f_7) = \{ca_1, cb_1, a_1b_1, ca_2, cb_2, a_2b_2, ca_3, cb_3, a_3b_3, ca_4, cb_4, a_4b_4, cb_5, a_5b_5, cb_6, a_6b_6, cb_7, a_7, b_7\}$.



Gambar 8. Graf Persahabatan f_7

Dari Kasus 1 sampai dengan Kasus 3 jumlah kelas partisi Π sedikitnya adalah 3. Untuk Kasus 4 sampai dengan Kasus 6 jumlah kelas partisi Π sedikitnya adalah 4. Sedangkan pada Kasus 7 diperoleh bahwa jumlah kelas partisi Π sedikitnya adalah 5. □

3. Kesimpulan

Dimensi partisi dari graf persahabatan f_n adalah k, dengan k merupakan bilangan bulat terkecil sedemikian hingga $\binom{k}{2} \geq n$ dan dapat disimpulkan juga bahwa dalam menentukan dimensi partisi tersebut tidak boleh mengambil titik-titik di kelas partisi yang sama dikarenakan nilai representasinya akan sama sehingga haruslah memilih titik-titik di kelas partisi yang berbeda.

4. Ucapan Terima kasih

Pada penulisan artikel ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada bapak Narwen, ibu Lyra Yulianti, ibu Izzati Rahmi HG, bapak Effendi dan ibu Susila Bahri yang telah memberikan kritik dan saran kepada penulis dalam penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

[1] Bondy, J. A. and U. S. R Murty. 1976. *Graph Theory with Applications*. Elsevier Science Published Co., Inc, New York.
[2] Chartrand,G.,Salehi, E., dan Zhang, P., (1998): On the partition dimension of graph .*Congr. Numerantium*. **130** : 157 – 168.
[3] Chartrand,G.,Salehi, E., dan Zhang, p.,(2000): The partition dimension of graph, *Aequationes Math*. **59**: 45 – 54.
[4] Darmaji.2011. *Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung*, Disertasi Doktor, tidak diterbitkan, Sekolah Pascasarjana Institut Teknologi Bandung, ITB.