Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **2** Hal. 43 – 49
ISSN : 2303–291X

MODEL BLACK-SCHOLES OPSI CALL DAN OPSI PUT TIPE EROPA DENGAN DIVIDEN PADA KEADAAN CONSTANT MARKET

ELSA WAHYUNI, RIRI LESTARI, MAHDHIVAN SYAFWAN
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : wahyunielsa04@gmail.com

Abstrak. Opsi tipe Eropa adalah suatu bentuk perjanjian berupa kontrak yang memberikan pemegang opsi suatu hak tetapi bukan suatu kewajiban untuk membeli atau menjual aset tertentu dengan harga tertentu pada waktu jatuh tempo. Opsi *call* memberikan hak kepada pemegang opsi untuk membeli saham pada waktu jatuh tempo. Sementara opsi *put* memberikan hak untuk menjual saham. Metode Black-Scholes merupakan salah satu metode untuk menentukan harga opsi. Asumsi yang digunakan pada model ini adalah adanya pembagian dividen. Dividen dibayarkan pada keadaan *constant market*. Harga saham yang berubah secara acak menurut waktu diasumsikan sebagai proses stokastik. Prediksi harga saham diasumsikan hanya dipengaruhi oleh harga saham saat ini dan tidak dipengaruhi oleh harga saham di masa lampau. Perhitungan harga opsi saham *chevron corporation* pada tanggal 16 November 2016 dengan mengaplikasikan model Black-Scholes. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa pada keadaan *constant market* sebaiknya investor membeli opsi *put* di pasar saham dengan harga opsi yang lebih kecil dari harga opsi model Black-Scholes yaitu pada harga pelaksanaan 101, 102, 104, 105, 106, 107 dan 108, sedangkan untuk opsi *call* sebaiknya investor membeli opsi *call* di pasar saham untuk harga pelaksanaan 100 dan 101.

Kata Kunci: Opsi tipe Eropa, Opsi call, Opsi put, Proses Stokastik, Dividen, Constant Market, Model Black-Scholes

1. Pendahuluan

Perkembangan ekonomi dan keuangan pada zaman sekarang ini menjadi sorotan bagi kalangan pebisnis, salah satunya adalah perdagangan pasar modal. Pasar modal saat ini menjadi sasaran para investor untuk melakukan berbagai macam bentuk investasi. Investasi sering juga disebut dengan penanaman modal. Suatu peningkatan pendapatan akan mendorong investasi yang lebih besar dengan tingkat bunga yang lebih tinggi [1]. Selain berinvestasi, para investor biasanya juga tertarik untuk membeli lembar saham ataupun lembar opsi.

Ada dua macam kontrak opsi saham, yaitu opsi *call* dan opsi *put*. Opsi *call* adalah tipe kontrak yang memberikan hak untuk membeli sebuah aset pada harga kesepakatan dan dalam jangka waktu tertentu yang disepakati. Sedangkan opsi *put* adalah tipe kontrak yang memberikan hak untuk menjual sebuah aset pada harga kesepakatan dan dalam jangka waktu yang telah disepakati [1]. Dilihat dari cara pelaksanaan sebuah opsi, terdapat dua tipe opsi yaitu opsi tipe Eropa dan opsi tipe

Amerika. Opsi tipe Eropa yaitu suatu kontrak opsi yang hanya bisa dilaksanakan pada hari terakhir yaitu pada waktu jatuh tempo berlakunya opsi tersebut. Opsi tipe Amerika yaitu suatu kontrak opsi yang bisa dilaksanakan kapan saja mulai dari tanggal penandatanganan kontrak sampai pada waktu jatuh tempo berlakunya opsi.

Nilai opsi dapat ditentukan dengan menggunakan beberapa model, salah satunya adalah model Black-Scholes. Model Black-Scholes dapat digunakan untuk opsi tipe Eropa dan dilaksanakan pada saat jatuh tempo. Tipe opsi yang digunakan pada penelitian ini adalah opsi tipe Eropa dan tidak terdapat pajak serta biaya transaksi sampai waktu jatuh tempo opsi tersebut [3]. Sebagian besar opsi saham yang diperjualbelikan pada kenyataannya membayarkan dividen. Dividen adalah pembagian keuntungan suatu perusahaaan terhadap para pemegang saham. Jika dividen dibagikan maka akan menurunkan harga opsi. Dividen dibagikan dalam keadaan *constant market*. Berdasarkan penjelasan di atas, maka penelitian ini membahas tentang Model Black-Scholes Opsi *Call* dan Opsi *Put* Tipe Eropa dengan Dividen pada Keadaan *Constant Market*.

2. Model untuk Harga Saham

Harga saham yang berubah secara acak menurut waktu diasumsikan sebagai proses stokastik. Misalkan harga saham dilambangkan dengan S_t pada waktu t. Pada selang waktu yang kecil dt, harga saham S_t akan berubah menjadi $S_t + dS_t$, sehingga tingkat pengembalian saham dilambangkan dengan $\frac{(dS_{(t)})}{(S_{(t)})}$ yang didefinisikan

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \tag{2.1}$$

dengan μdt adalah pengembalian dari harga saham yang bersifat deterministik, σdW_t adalah pengembalian dari harga saham yang bersifat stokastik dan W_t adalah gerak Brown, serta μ adalah nilai ekspektasi return atau tingkat rata-rata pertumbuhan harga saham dan σ adalah volatilitas harga saham.

3. Lema Ito

Misalkan harga dari suatu variabel x memenuhi persamaan differensial stokastik

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dW_t. \tag{3.1}$$

Lema Ito mengikuti proses berikut

$$\partial f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}b^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} b dW_t. \tag{3.2}$$

4. Dividen

Dividen adalah pembayaran atau pembagian keuntungan oleh perusahaan kepada para pemegang saham. Nilai *present value* dividen $PV(q)$ adalah

$$PV(q) = qe^{-r(\tau - t)},$$

dimana q adalah dividen lembar saham yang akan dibayarkan, r adalah tingkat suku bunga bebas resiko, t adalah *ex-dividend*.

5. Keadaan *Constant Market*

Keadaan *constant market* adalah keadaan kontrak opsi saham dengan suku bunga bebas resiko r konstan dan pengembalian dividen q konstan. Jika perusahaan membagikan dividen, misal dividen pada t_1 adalah q_{t_1}, maka harga saham setelah pembagian dividen dirumuskan sebagai berikut

$$S = E\left(S_{t_1} + qe^{[-r(t_1-t)]}\right). \tag{5.1}$$

harga saham pada saat jatuh tempo akan mengalami penurunan sebesar *present value* dari dividen yang dibagikan, yaitu

$$S_T = S - qe^{[-r(\tau-t)]}. \tag{5.2}$$

Asumsi untuk menentukan nilai opsi beli tipe Eropa dengan pembagian dividen dalam keadaan *constant market* adalah

(1) Model pergerakan harga saham mengikuti persamaan differensial stokastik.
(2) Tingkat suku bunga bebas resiko sampai waktu jatuh tempo T adalah konstan.
(3) Pada waktu *ex-dividend* $t \leq T$ perusahaan membagikan dividen (konstan).
(4) Tidak ada biaya transaksi dan pajak.
(5) Pasar bebas Arbitrasi.

Nilai portofolio π yang terdiri dari opsi $\bar{c}$ dengan perubahan saham pada jangka pendek, yaitu

$$\pi = \bar{C} - \frac{\partial \bar{C}}{\partial S_t} S_t. \tag{5.3}$$

Perhatikan persamaan (2.1), diperoleh

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{5.4}$$

Gunakan Lema Ito pada Persamaan (3.1). Misalkan $a(x,t) = a(S_t,t) = \mu S_t$ dan $b(x,t) = b(S_t,t) = \sigma S_t$. Aplikasikan persamaan (3.1) dengan memisalkan $f(S_t,t) = ln(S_t)$. Dengan mengaplikasikan Lema Ito, diperoleh persamaan differensial stokastik untuk proses harga saham, yaittu

$$dS_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) S_t dt + \sigma S_t dW_t. \tag{5.5}$$

Substitusi nilai $a(S_t,t)$ dan$b(S_t,t)$ dan nilai turunan yang diperoleh dari pemisalan diatas ke persamaan (3.2) dan aplikasikan untuk $\bar{C}(S,t)$ diperoleh

$$d\bar{C} = \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} dt + \frac{\partial \bar{C}}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial S_t^2} dt \tag{5.6}$$

Berdasarkan persamaan (5.6) diperoleh bahwa

$$d\left(\bar{C} - \frac{\partial \bar{C}}{\partial S_t} S_t\right) = \frac{\bar{C}}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial S_t^2} dt. \tag{5.7}$$

Sehingga perubahan nilai portofolio menjadi

$$d\pi = d\left(\bar{C} - \frac{\partial \bar{C}}{\partial S_t} S_t\right) = \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial S_t^2} dt. \tag{5.8}$$

Kedua ruas dari persamaan (5.8) dibagi dengan dt, sehingga diperoleh

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_t^2} \tag{5.9}$$

Nilai perubahan portofolio dengan tidak adanya arbitrasi harus sama dengan suku bunga bebas resiko r, nilai perubahan portofolio $d\pi$ yang di investasikan adalah rdt dan jika terjadi pembagian dividen, maka nilai portofolio dapat ditulis dengan

$$\frac{d\pi}{dt} = r\pi - q\frac{\partial \bar{C}}{\partial S_t}S_t = r\left(\bar{C} - \frac{\partial \bar{C}}{\partial S_t}S_t\right) - q\frac{\partial \bar{C}}{\partial S_t}S_t. \tag{5.10}$$

Dari persamaan (5.9) dan persamaan (5.10), diperoleh

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial S^2}dt + (r-q)\frac{\partial \bar{C}}{\partial S}S_t - rC = 0, \tag{5.11}$$

6. Penurunan Model Black-Scholes Opsi Call dan Opsi Put Tipe Eropa Dengan Dividen Pada Keadaan *Constant Market*

Model perubahan harga saham dapat dinyatakan dengan

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t, \tag{6.1}$$

Berdasarkan Persamaan (3.2) diperoleh

$$d\ln(S_t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma W_t \tag{6.2}$$

sehingga

$$S_\pi = S_0 \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma W_t\right), \tag{6.3}$$

Variabel acak W_t adalah berdistribusi normal denga nilai tengah 0 dan variansi T. Begitu juga distribusi dari $\sqrt{T}Y$ dimana $Y \sim N(0,1)$ [2].

$$S_\tau = S_0 \exp\left((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T}Y\right) \tag{6.4}$$

Diasumsikan bahwa semua investor opsi netral terhadap resiko (*risk neutral Q)*, sehingga nilai opsi *put* tipe Eropa pada saat t adalah

$$P(S,t) = e^{-r(\tau-t)}E^Q[(K-S_\tau)^+]. \tag{6.5}$$

Harga saham setelah pembagian dividen dapat dinyatakan dalam bentuk

$$S_0 = S - qe^{-r(\tau-t)}. \tag{6.6}$$

Jika pembagian dividen dilaksanakan pada waktu jatuh tempo T dan $PV(q) = qe^{-r(\tau-t)}$ maka diperoleh

$$S_\tau = (S - PV(q))e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(\tau-t)+\sigma\sqrt{T-t}Y} \tag{6.7}$$

dengan $S_0 = S - PV(q)$. Berdasarkan persamaan (6.5) dapat ditulis

$$P(S,t) = e^{-r(T-t)} E^Q \left[\left(K - \left((S - PV(q)) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}Y} \right) \right)^+ \right] \tag{6.8}$$

$$= e^{-r(\tau-t)} \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(K - \left((S - PV(q)) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}X} \right) \right)^+ e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{6.9}$$

$$\tag{6.10}$$

Perhatikan bahwa $K - (S - PV(q)) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}X} \geq 0$, diperoleh $X \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(ln \left(\frac{k}{S - PV(q)} \right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(T-t) \right)$.

Misal $T_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(ln \left(\frac{k}{S - PV(q)} \right) - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(T-t) \right)$, sehingga $P(S,t)$ pada persamaan (6.9) dapat ditulis menjadi

$$P(S,t) = e^{-r(T-t)} \int_{T_1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(K - \left((S - PV(q)) e^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}X} \right) \right)^+ e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{6.11}$$

$$\tag{6.12}$$

Misalkan $y = x - \sigma\sqrt{T-t}$ maka $x = y - \sigma\sqrt{T-t}$, sehingga $x^2 = y^2 + 2y\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t)$ dan $dy = dx$, maka persamaan diatas menjadi

$$P(S,t) = Ke^{-r(\tau-t)}(1 - N(T_1)) - (S - PV(q))(1 - N(T_1 - \sigma\sqrt{T-t})) \tag{6.13}$$

Misalkan $T_1 = d_2$ dan $T_1 - \sigma\sqrt{T-t} = (d_1)$, Sehingga model *Black-Scholes* opsi *put* tipe Eropa dengan pembagian dividen pada keadaan *constant market* adalah

$$P(S,t) = Ke^{-r(\tau-t)} N(-d_2) - (S - PV(q)) N(-d_1) \tag{6.14}$$

dimana

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(ln \left(\frac{S - PV(q)}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(T-t) \right), \tag{6.15}$$

dan

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \tag{6.16}$$

Dengan menggunakan *put-call parity* dan substitusikan nilai opsi *put* tipe Eropa dengan pembagian dividen dapat diperoleh model *Black-Scholes* opsi *call* tipe Eropa dengan pembagian dividen pada keadaan *constant market* adalah

$$C(S,t) = (S - PV(q)) N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2), \tag{6.17}$$

dimana

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(ln \left(\frac{S - PV(q)}{K} \right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 \right)(T-t) \right), \tag{6.18}$$

dan

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \tag{6.19}$$

dengan σ adalah volatilitas, S adalah harga saham setelah pembagian dividen, T adalah waktu jatuh tempo, q adalah dividen, t adalah waktu *ex-dividend*, r adalah suku bunga.

7. Contoh Kasus

Dalam penelitian ini, data yang digunakan adalah perusahaan *Chevron Corporation (CVX)* diambil dari *www.yahoofinance.com*. Studi kasus dalam penelitian ini menggunakan data sekunder harga saham harian *Chevron Corporation* pada tanggal 18 Desember 2015 sampai dengan tanggal 16 Desember 2016.

Analisis *Constant Market*

Berikut akan ditentukan harga opsi *call* dan opsi *put* tipe Eropa dengan pembagian dividen pada keadaan *constant market Chevron Corpration* pada tanggal 16 November 2016. Dari data yang diperoleh dapat diketahui waktu sekarang (t) 16 November 2016, waktu jatuh tempo (T) pada tanggal 23 Desember 2016, strike price (K)=100, 101, 102, 104, 105, 106, 107 dan 108, harga saham pada tanggal 16 November 2016 yaitu $S_{232} = 108.35$, volatilitas sebesar 0.241, suku bunga diambil dari suku bunga Negara Amerika Serikat (suku bunga Federal Fund) yaitu 0.75, dividen 1.08. Waktu pelaksanaan dipiih pada tanggal 23 Desember 2016, berarti periode waktu hidup opsi adalah 37 hari sehingga $T - t = \dfrac{37}{365} = 0.1$. Nilai-nilai opsi *put* tipe Eropa dengan pembagian dividen pada keadaan *constant market* untuk harga pelaksanaan lainnya seperti pada tabel berikut.

No	Harga Pelaksanaan	Opsi *Put* Model Black-Scholes	Opsi *Put* di Pasar Saham
1	100	0.078	0.13
2	101	0.95216	0.18
3	102	1.190	0.06
4	104	1.809	0.13
5	105	2.180	0.04
6	106	2.609	0.04
7	107	3.083	0.03
8	108	3.605	0.03

No	Harga Pelaksanaan	Opsi *Call* Model Black-Scholes	Opsi *Call* di Pasar Saham
1	100	7.423	7.00
2	101	7.298	6.55
3	102	6.537	10.34
4	104	5.157	13.9
5	105	4.530	8.63
6	106	3.959	12.05
7	107	3.434	9.76
8	108	2.956	10.1

8. Penutup

Dilihat dari segi kerugian yang diperoleh, kerugian maksimal yang dialami investor pemegang opsi adalah sebesar harga opsi yang dibayarkan. Sebaliknya, dilihat dari segi keuntungan, yang diperoleh, keuntungan yang maksimal yang diperoleh penjual opsi adalah sebesar harga opsi yang diterima, sedangkan kerugian yang mungkin dialami penjual opsi tak terbatas.

Daftar Pustaka

[1] Anonim. *Opsi*.https://id.wikipedia.org/wiki/opsi(keuangan). Diakses pada tanggal 09 September 2016 pukul 09:10 WIB

[2] Bain, L.J. 1992. *Introduction to Probability and Mathematical Statistic*. Ed ke-2. Duxbury Press, California

[3] Black.F, Scholes M. 1973. *The Pricing of Options and Corporate liabilities.* The Journal of Political Economy

[4] Kishimoto, M. 2008. *On the Black-Scholes Equation* : Various Derivations. MS and E 408 sTerm Paper

[5] Rahman, A. 2010. *Model Black-Scholes Put Call Parity Harga Opsi Tipe Eropa dengan Pembagian Dividen [skripsi]*. Surakarta. Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Sebelas Maret.