Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **4** Hal. 1 – 6
ISSN : 2303–291X

DIMENSI METRIK DARI GRAF SPINNER $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$ UNTUK $n = 1$

CITRA MAYORA, NARWEN, DES WELYYANTI
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email: maycitra96@gmail.com

Abstrak. Misalkan u dan v adalah titik-titik dalam graf terhubung G. Jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada graf G. Bila diberikan himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \cdots, w_k\}$ dari titik-titik dalam graf terhubung G dan titik $v \in V(G)$, representasi dari v terhadap W adalah k-vektor yang dapat ditulis dengan $r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \cdots, d(v, w_k))$. Jika $r(v|W)$ untuk setiap titik $v \in (G)$ berbeda, maka W disebut himpunan pembeda dari $V(G)$. Himpunan pembeda dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum dan kardinalitas dari basis metrik tersebut dinamakan dimensi metrik dari graf G dan dinotasikan dengan $dim(G)$. Graf spinner adalah perkalian kartesius antara graf C_3 dan graf P_2 yang menghasilkan graf $C_3 \times P_2$, kemudian graf $C_3 \times P_2$ tersebut dikoronakan dengan graf komplemen K_n yaitu $\overline{K_n}$, sehingga graf spinner tersebut dapat dinotasikan dengan $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$. Pada paper ini akan dibahas dimensi metrik dari graf spinner $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$ untuk $n = 1$.

Kata Kunci: Dimensi metrik, Himpunan pembeda, Representasi, Hasilkali kartesius, Graf korona

Diterima	:	*29 November 2018*
Direvisi	:	*3 Desember 2018*
Dipublikasikan	:	*30 Desember 2018*

1. Pendahuluan

Graf merupakan salah satu struktur dasar dari ilmu komputer. Teori graf pertama kali dikenalkan pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan Swiss yang bernama Leonard Euler untuk menyelesaikan masalah jembatan Konigsberg [2]. Seiring perkembangan zaman dan kemajuan teknologi, aplikasi teori graf telah merambah ke berbagai disiplin ilmu lainnya dan membantu memudahkan orang untuk menyelesaikan permasalahan yang diberikan. Salah satu topik dalam teori graf adalah tentang dimensi metrik.

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Jika subhimpunan terurut $W \subset V(G)$, dengan $W = \{w_1, w_2 \cdots w_k\}$ dan $v \in V(G)$ maka representasi v terhadap W didefinisikan sebagai pasangan-k terurut $(d(v, w_1), d(v, w_2) \cdots d(v, w_k))$ dan dinotasikan dengan $r(v|W)$. Jika untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka W disebut himpunan pembeda dari $V(G)$. Himpunan pembeda W dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari graf G. Semua titik anggota basis dari G disebut titik basis dari graf G. Dimensi metrik dari graf G, dinotasikan $\dim(G)$, adalah banyak titik dalam basis G. Jika $dim(G) = k$ maka G dikatakan berdimensi metrik k. [3]

2. Landasan Teori

2.1. *Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf*

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tidak terurut dari titik titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi. Misalkan $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ adalah himpunan titik dari graf G, ditulis $V(G)$ dan $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ adalah himpunan sisi dari graf G, ditulis $E(G)$. Secara umum dapat ditulis sisi v_jv_i atau $v_iv_j \in E(G)$. Kardinalitas himpunan $V(G)$ disebut **orde**. Titik v_i dan v_j pada G dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) jika $v_iv_j \in E(G)$, atau jika v_iv_j suatu sisi di G. Jika $v_iv_j \notin E(G)$, maka v_i dan v_j tidak bertetangga. Banyaknya titik yang bertetangga ke v dinamakan dengan **derajat** dan dinotasikan dengan $deg(v)$.

jalan (*walk*) dari titik v_0 ke titik v_k di graf G adalah suatu barisan berhingga dari titik-titik dan sisi di G sedemikian sehingga $v_{i-1}v_i \in E(G)$ untuk $i = 1, 2, \cdots k$. Titik v_0 dan titik v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir. **Lintasan** (*path*) adalah jalan dimana titik dan sisi yang dilewati tidak boleh berulang. **Jejak** (*trail*) adalah jalan yang melewati setiap sisi yang berbeda. **Panjang** (*length*) dari jalan adalah banyaknya sisi dari barisan tersebut. **Jarak** pada graf, untuk suatu titik u dan v di graf terhubung G atau $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v di G. **Diameter** dari graf G, dinotasikan $diam(G)$, adalah nilai maksimum dari jarak antara sebarang dua titik di graf G.

Graf lingkaran (*cycle*) adalah graf yang setiap titiknya berderajat dua. Banyak titik pada graf lingkaran sama dengan banyak sisinya, graf lingkaran dengan n titik dinotasikan dengan C_n,$n \geq 3$ dan n adalah bilangan bulat positif. Graf yang tidak memuat lingkaran disebut **graf acyclic**. **Graf lintasan** (*path*) adalah graf sederhana yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n, untuk $n \geq 2$. Banyak sisi pada graf lintasan yang terdiri dari n titik adalah $n - 1$. **Graf komplemen** dari graf G yang dinotasikan dengan $\overline{G}$ adalah sebuah graf dengan himpunan titik yang sama, yaitu $V(\overline{G}) = V(G)$ dan memiliki sifat bahwa dua titik $\overline{G}$ bertetangga jika dan hanya jika dua titik yang sama dalam G tidak bertetangga (dengan kata lain sisi yang ada pada G tidak ada pada $\overline{G}$).

2.2. *Graf Hasil Perkalian Kartesius*

Hasil kali kartesian antara graf G_1 dan graf G_2, dinotasikan dengan $G \cong G_1 \times G_2$ menghasilkan sebuah graf baru G yang mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \times V(G_2) \cup V(G_1) \times E(G_2)$. Titik ujung sisi $(d, v) \in E(G_1) \times V(G_2)$ adalah titik-titik (x, v) dan (y, v) dengan x dan y adalah titik ujung dari sisi $d \in E(G_1)$. Simpul ujung sisi $(u, e) \in V(G_1) \times E(G_2)$ adalah titik (u, s) dan (u, t), dengan s dan t adalah titik ujung dari sisi $e \in E(G_2)$. [3]

Dapat dilihat bahwa graf perkalian hasil kartesius dari $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ mempunyai banyak titik dan banyak sisi sebagai berikut.

$$|V(G_1 \times G_2)| = |V(G_1)|.|V(G_2)|, \tag{2.1}$$

$$|E(G_1 \times G_2)| = |E(G_1)|.|V(G_2)| + |E(G_2)|.|V(G_1)|. \tag{2.2}$$

2.3. *Graf Hasil Korona*

Di dalam pembahasan mengenai graf, terdapat beberapa jenis operasi antar graf, salah satunya adalah operasi korona *(corona product)*, yang dinotasikan dengan $\odot$. Operasi korona dari dua graf G dan H didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah kopi dari graf G dan $|V(G)|$ kopi dari graf H dan kemudian menghubungkan dengan sebuah sisi setiap simpul dari kopi ke-i dari graf H dengan sebuah titik ke-i dari graf G, dengan $1 \leq i \leq |V(G)|$. Graf $G \odot H$ mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$V(G \odot H) = V(G) \cup \bigcup_{i=1}^{n} V(H_i), \tag{2.3}$$

$$E(G \odot H) = E(G) \cup \bigcup_{i=1}^{n} E(H_i) \cup \{x_i y_{ij} \mid 1 \leq j \leq m, y_i \in V(H_i)\}, \tag{2.4}$$

Dapat dilihat bahwa graf hasil korona dari $G = (V, E)$ dan $H = (V, E)$ mempunyai banyak titik dan banyak sisi sebagai berikut.

$$|V(G \odot H)| = |\, V(G) \,| + |\, V(G) \,| \cdot |\, V(H) \,|, \tag{2.5}$$

$$|E(G \odot H)| = |\, E(G) \,| + |\, V(G) \,| \cdot |\, E(H) \,| + |\, V(G) \,| \cdot |\, V(H). \tag{2.6}$$

2.4. *Dimensi Metrik*

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Misalkan terdapat $W \subset V(G)$, dengan $W = \{w_1, w_2, \cdots w_k\}$ dan $v \in V(G)$. Representasi v terhadap W didefinisikan sebagai pasangan-k terurut $(d(v, w_1), d(v, w_2), \cdots d(v, w_k))$, dinotasikan $r(v|W)$. Jika untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u|W) \neq r(v|W)$, maka W disebut himpunan pembeda dari $V(G)$. Himpunan pembeda W dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pembeda minimum atau basis dari graf G. Semua titik anggota basis dari G disebut titik basis dari graf G. Dimensi metrik dari graf G, dinotasikan $\dim(G)$, adalah banyak titik dalam basis G. Jika $\dim(G) = k$ maka G dikatakan berdimensi metrik k. [3]

Teorema 2.1. [4] *Diberikan graf terhubung G dan $v_i \in V(G)$ dengan $i = 1, 2, \cdots, n$. Graf G berdimensi metrik satu jika dan hanya jika graf G merupakan graf lintasan P_n, dengan $n \geq 2$.*

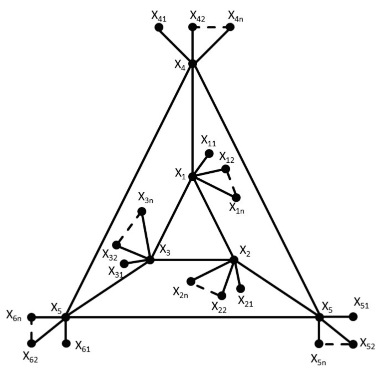
Teorema 2.2. [4] *Jika C_n adalah graf lingkaran dengan n titik dan $n \geq 3$, maka* $\dim(C_n) = 2$.

Teorema 2.3. [5] *Misalkan G adalah suatu graf terhubung sebarang dengan $|V(G)| = n$ dan K_m adalah komplemen dari graf lengkap K_m dengan $m \geq 2$. Maka* $\dim(G \odot K_m) = n(m-1)$.

3. Pembahasan

3.1. *Graf Spinner*

Graf spinner adalah perkalian kartesius antara graf C_3 dan graf P_2 yang menghasilkan graf $C_3 \times P_2$, kemudian graf $C_3 \times P_2$ tersebut di koronakan dengan graf komplemen K_n yaitu $\overline{K_n}$, sehingga graf spinner tersebut dapat dinotasikan dengan $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$. [1] Misalkan graf $C_3 \times P_2$ dengan $V(C_3 \times P_2) = \{x_1, x_2, \cdots, x_6\}$ dan graf $\overline{K}_n$ dengan $V(\overline{K_{in}}) = \{x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in}\}$, dimana $\overline{K_{in}}$ adalah salinan ke-i dari graf $\overline{K_n}$ untuk $i = 1, 2, \cdots ., n$. Perhatikan graf $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$ pada Gambar 1 [1].



Gambar 1. Graf Spinner $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$.

Berdasarkan persamaan (2.1) dan persamaan (2.3) banyak anggota dari himpunan titik adalah

$$
\begin{aligned}
|\, V(C_3 \times P_2 \odot \overline{K_n}) \,| &= |\, V(C_3) \,| \cdot |\, V(P_2) \,| + |\, V(C_3) \,| \cdot |\, V(P_2) \,| \cdot |\, V(\overline{K_n}) \,|, \\
&= |\, V(C_3) \,| \cdot |\, V(P_2) \,| \cdot (1 + |\, V(\overline{K_n}) \,|) \\
&= 3 \cdot 2 \cdot (1 + n), \\
&= 6(n+1),
\end{aligned}
$$

dan berdasarkan persamaan (2.2) dan persamaan (2.4) banyak anggota dari himpunan sisi adalah

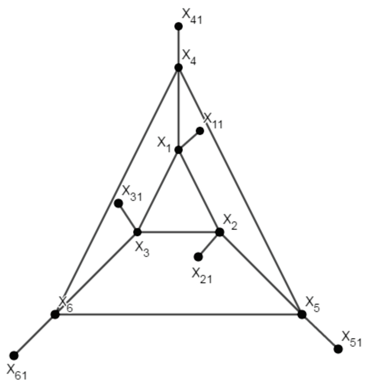
$$
\begin{aligned}
|\, E(C_3 \times P_2 \odot \overline{K_n})| &= |\, E(C_3) \,| \cdot |\, V(P_2) \,| + |\, V(C_3) \,| \cdot |\, E(P_2) \,| + \\
&\quad |\, V(C_3) \,| \cdot |\, V(P_2) \,| \cdot |\, V(\overline{K_n}) \,|, \\
&= 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot n, \\
&= 9 + 6n, \ \text{untuk } n \geq 1.
\end{aligned}
$$

3.2. *Dimensi Metrik dari Graf Spinner*

Sebelumnya telah dibahas mengenai hasil korona antara graf G sebarang dengan graf komplemen K_n yang terdapat pada Teorema 2.3. Dalam bab ini akan dibahas contoh dari Teorema 2.3 yaitu graf G yang diambil adalah graf hasil kali kartesius antara graf C_3 dan P_2 yang hasilnya dikoronakan dengan graf komplemen K_n.

Teorema 3.1. *Jika $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$ adalah graf spinner dengan n adalah bilangan bulat positif, maka dimensi metrik dari graf spinner $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$ untuk $n = 1$ adalah* 3.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa dimensi metrik dari graf spinner $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_1}$ adalah 3. Perhatikan graf spinner $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_1}$ yang terdapat pada Gambar 2. Ini



Gambar 2. Graf $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_1}$

berarti graf spinner $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K}_n$ dengan $n = 1$. Karena graf spinner $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K}_n$ bukan graf lintasan P_n maka $\dim((C_3 \times P_2) \odot \overline{K}_n)) \geq 2$. Untuk mencari batas atas, pilih $W = \{x_1, x_4\}$ maka diperoleh representasi setiap titik dari graf terhadap W adalah sebagai berikut:

$$r(x_2|W) = (1, 2)$$
$$r(x_3|W) = (1, 2)$$

Hal ini tidak memberikan representasi yang berbeda, karena $r(x_2|W) = r(x_3|W) = (1, 2)$, jadi $W = \{x_1, x_4\}$ bukan himpunan pembeda bagi graf $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_1}$. Untuk setiap $|W| = 2$ bukan himpunan pembeda karena memiliki nilai representasi yang sama.

Selanjutnya, pilih $W = \{x_1, x_4, x_5\}$, maka diperoleh representasi setiap titik pada graf terhadap W adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned} r(x_1|W) &= (0,1,2) & r(x_{11}|W) &= (1,2,3)\\ r(x_2|W) &= (1,2,1) & r(x_{21}|W) &= (2,3,2)\\ r(x_3|W) &= (1,2,2) & r(x_{31}|W) &= (2,3,3)\\ r(x_4|W) &= (1,0,1) & r(x_{41}|W) &= (2,1,2)\\ r(x_5|W) &= (2,0,1) & r(x_{51}|W) &= (3,2,1)\\ r(x_6|W) &= (2,1,1) & r(x_{61}|W) &= (3,2,2), \end{aligned}$$

Karena tidak satupun nilai dari $r(x_i|W) = r(x_j|W)$, untuk $i \neq j$ maka akan memberikan representasi yang berbeda dengan $|W| = 3$. Jadi batas $\dim((C_3 \times P_2) \odot \overline{K_1})$ adalah 3. Karena batas atas $\dim((C_3 \times P_2) \odot \overline{K_1})$ adalah 3 maka diperoleh $\dim((C_3 \times P_2) \odot \overline{K_1}) \leq 3$ sehingga $\dim((C_3 \times P_2) \odot \overline{K_1}) = 3$. $\square$

4. Kesimpulan

Dimensi Metrik adalah kardinalitas minimum himpunan pembeda atau *resolving set* pada suatu graf. Graf spinner adalah perkalian kartesius antara graf C_3 dan graf P_2 yang menghasilkan graf $C_3 \times P_2$, kemudian graf $C_3 \times P_2$ tersebut di koronakan dengan graf komplemen K_n yaitu $\overline{K_n}$, sehingga graf spinner tersebut dapat dinotasikan dengan $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$. Dari hasil penelitian, telah diperoleh dimensi metrik dari graf spinner $(C_3 \times P_2) \odot \overline{K_n}$ adalah 3 untuk $n = 1$.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Efendi, M.Si, Ibu Dr. Haripamyu, yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Azizu, K. Al. 2018. *Pelabelan Ajaib Pada Graf Prisma Bercabang. Skripsi*, tidak dipublikasikan, Jurusan Matematika Universitas Andalas

[2] Bondy, J.A. dan U.S.R Murty. 1976.*Graph Theory with Applications.* London.

[3] Darmaji. 2011. Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Buah Graf Terhubung. *Disertasi Program Studi Doktor Matematika ITB*, tidak diterbitkan.

[4] Eka R, Septiana. 2014. Dimensi metrik pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang dan Graf Bipartit Komplit. *Jurnal Matematika Universitas Negeri Surabaya.* **1**:1 – 6.

[5] Iswadi, H., Baskoro, E.T., Simanjuntak, R., Salman, A.N.M. 2008. The metric dimension of graph with pendants edges. *Journal of Combin. Math. and Comb. Computing* **65** : 139 – 145.

[6] Roza, I., Narwen, Zulakmal, 2014. Graf garis (*line graph*) dari graf siklus, graf lengkap dan graf bintang. *Jurnal Matematika Unand.* **3**(2): 1 – 4.