Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **4** Hal. 93 – 99
ISSN : 2303–291X

INFERENSI BAYESIAN PADA DISTRIBUSI EKSPONENSIAL

ANNISA RAHMADIAH, FERRA YANUAR, DODI DEVIANTO
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus Unand Limau Manis, Padang, Indonesia
email: annisarahmadiah4@gmail.com

Abstrak. Penelitian ini dilakukan dengan tujuan menduga parameter pada distribusi Eksponensial dengan metode Bayes. Pendugaan parameter dilakukan secara analitik dengan menggunakan distribusi Gamma sebagai prior konjugat dan distribusi prior Jeffrey sebagai prior non-informatif. Setelah itu, dilakukan evaluasi penduga menggunakan metode AIC. Berdasarkan studi analitik diperoleh bahwa distribusi Gamma sebagai distribusi prior konjugat lebih baik dibandingkan dengan prior Jeffrey dalam hal pendugaan parameter.

Kata Kunci: Metode Bayes, distribusi prior, distribusi posterior, fungsi *likelihood*, metode AIC

Diterima	:	*29 November 2018*
Direvisi	:	*3 Desember 2018*
Dipublikasikan	:	*30 Desember 2018*

1. Pendahuluan

Statistika inferensia adalah ilmu yang mempelajari tentang analisis data yang kemudian dilakukan penarikan kesimpulan mengenai keseluruhan gugus data induknya. Salah satu bidang utama dalam statistika inferensia adalah pendugaan parameter. Pendugaan parameter adalah prosedur yang dilakukan untuk menduga parameter populasi, seperti nilai harapan, ragam, dan lain-lain [6].

Pendugaan parameter terdapat beberapa metode yang digunakan, yaitu metode MLE dan metode Bayes. Perbedaan metode MLE dan metode Bayes adalah pada metode MLE kesimpulan didasarkan semata-mata pada informasi dari sampel yang diambil dari populasi. Sementara itu, metode Bayes menggunakan atau menggabungkan pengetahuan subjektif mengenai distribusi peluang dari parameter yang tidak diketahui dengan informasi yang diperoleh dari data sampel [6]. Pengetahuan subjektif mengenai distribusi peluang dari parameter yang tidak diketahui tersebut merupakan distribusi awal yang memberikan informasi tentang suatu parameter disebut distribusi prior, sedangkan informasi yang diperoleh dari data sampel dinyatakan dalam bentuk fungsi *likelihood*. Gabungan distribusi prior dan fungsi *likelihood* kemudian membentuk distribusi baru yang disebut dengan distribusi posterior. Dengan cara seperti ini dugaan parameter yang dihasilkan dengan metode Bayes akan lebih mendekati pada nilai sebenarnya daripada metode MLE. Selain itu metode Bayes tidak memerlukan asumsi model klasik seperti pada metode MLE.

Salah satu distribusi kontinu yang umum digunakan adalah distribusi Eksponensial. Distribusi Eksponensial memiliki kaitan yang erat dengan kehidupan sehari-hari [7]. Terdapat beberapa jenis distribusi prior, yaitu distribusi prior Gamma sebagai distribusi prior konjugat, dan distribusi prior Jeffrey sebagai distribusi prior non-informatif. Kemudian akan diidentifikasi bentuk distribusi posterior yang dihasilkan dan dilakukan evaluasi metode penduga menggunakan metode AIC *(Akaike Information Criterion)* [5]

2. Landasan Teori

2.1. *Distribusi Gamma*

Peubah acak X dikatakan berdistribusi Gamma, dengan parameter $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$, bila fungsi kepekatan peluangnya berbentuk: [3]

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-x\beta) \tag{2.1}$$

untuk x ≥ 0. Peubah acak X berdistribusi Gamma dengan parameter α dan β dapat dinotasikan dengan X$\sim$Gamma(α, β).

2.2. *Distribusi Eksponensial*

Distribusi Eksponensial adalah bentuk khusus dari distribusi Gamma dengan α=1. [7]

Definisi 2.1. *Peubah acak X dikatakan berdistribusi Eksponensial, dengan parameter λ >0, bila fungsi kepekatan peluangnya berbentuk:*

$$f(x; \lambda) = \lambda \exp -\lambda x \tag{2.2}$$

untuk $x \geq$ 0.

Peubah acak berdistribusi Eksponensial dengan parameter λ dapat dinotasikan dengan $X \sim$ EXP(λ).

2.3. *Pendugaan Parameter dengan Metode Bayes*

Definisi 2.2. [7] *Nilai harapan dari distribusi posterior, yang dinotasikan dengan $\widehat{\lambda_\beta}$, merupakan penduga Bayes untuk λ.*

2.4. *Fungsi likelihood*

Definisi 2.3. [2] *Fungsi kepekatan peluang bersama dari $X_1, X_2, \cdots, X_n$ yang dihitung pada $x_1, x_2, \cdots, x_n$ adalah $f(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda)$ dan ini dirujuk oleh fungsi likelihood. Untuk $x_1, x_2, \cdots, x_n$ tetap, fungsi likelihood adalah fungsi dari parameter λ yang dinotasikan dengan $L(\lambda)$.*

Jika $X_1, X_2, \cdots, X_n$ merupakan contoh acak dari $f(x; \lambda)$, maka:

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= f(x_1; \lambda) f(x_2; \lambda) \cdots f(x_n; \lambda), \\ &= \Pi_{i=1}^n f(x_i; \lambda). \end{aligned}$$

2.5. *Distribusi Prior*

Distribusi prior merupakan distribusi awal yang memberikan informasi mengenai parameter yang akan diduga. Dalam pendugaan suatu nilai parameter, maka distribusi priornya dipilih secara subjektif oleh peneliti.

Distribusi prior terbagi atas dua, yaitu [4]:

(1) Berkaitan dengan bentuk distribusi hasil identifikasi pola datanya yang diperoleh dari fungsi *likelihood*, yaitu:
   (a) Distribusi prior konjugat. Distribusi prior ini mengacu pada pemilihan prior pada suatu model terutama dalam pembentukan pola fungsi *likelihood*nya.
   (b) Distribusi prior non-konjugat. Pemberian prior pada model tidak mengindahkan pola pembentuk fungsi *likelihood*nya.

(2) Berkaitan dengan informasi terdahulu terkait dengan penentuan masing-masing parameter pada pola distribusi priornya, yaitu:
   (a) Distribusi prior informatif. Distribusi prior ini mengacu pada pemberian parameter dari distribusi prior yang telah dipilih, baik distribusi prior konjugat atau prior non-konjugat. Pemberian nilai parameter pada distribusi prior ini mempengaruhi bentuk distribusi posterior yang akan didapatkan pada informasi data yang diperoleh.
   (b) Distribusi prior non-informatif. Distribusi prior ini tidak berdasarkan pada data yang ada atau distribusi prior yang tidak mengandung informasi mengenai parameter.

2.6. *Distribusi Posterior*

Definisi 2.4. [2] *Fungsi kepekatan peluang bersyarat dari λ jika diketahui pengamatan sampel $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ disebut kepekatan posterior fungsi kepekatan peluang posterior, yang didefinisikan sebagai berikut:*

$$f(\lambda|x) = \frac{f(x|\lambda)f(\lambda)}{\int_{-\propto}^{\propto} f(x|\lambda)f(\lambda)d\lambda} \tag{2.3}$$

2.7. *Metode Jeffrey*

Metode Jeffrey merupakan salah satu bentuk pendekatan dari prior non-informatif [3]. Distribusi prior non-informatif digunakan apabila tidak cukup informasi terkait parameter yang akan diestimasi.

Aturan Jeffrey. Distribusi prior untuk parameter tunggal λ, dikatakan sebagai distribusi prior non-informatif jika distribusi prior tersebut proporsional dengan akar dari informasi Fisher [4].

$$f(\lambda) \propto \sqrt{I(\lambda)}$$

maka: Dalam aplikasinya, distribusi prior Jeffrey diperluas menjadi perluasan distribusi prior Jeffrey, untuk $\lambda \geq 0$ didefinisikan dengan [1]:

$$f(\lambda) \propto [I(\lambda)]^c$$

maka:

$$f(\lambda) = k[I(\lambda)]^c \qquad (2.4)$$

dengan k adalah konstanta, c>0 sebagai konstanta Jeffrey dan I(λ) adalah informasi Fisher. Informasi Fisher dari parameterλ diberikan oleh [1]:

$$I(\lambda) = -nE[\frac{d^2}{d(\lambda)^2}\ln f(x|\lambda)].$$

2.8. *Akaike Information Criterion*

Salah satu metode dalam menentukan model terbaik adalah metode AIC. Model terbaik adalah model regresi yang memiliki nilai AIC terkecil. Definisi AIC dapat dilihat pada persamaan di bawah ini:

$$AIC = -2\ln L(\widehat{\lambda}) + 2p, \qquad (2.5)$$

dimana L($\widehat{\lambda}$) adalah fungsi *likelihood* dan p jumlah parameter [5].

3. Pembahasan

3.1. *Likelihood dan Distribusi Eksponensial*

Misalkan $X_1, X_2, \cdots, X_n$ adalah peubah acak dari distribusi Eksponensial dengan $X_i \sim EXP(\lambda)$, maka fungsi *likelihood*nya adalah

$$\begin{aligned} \text{f}(x|\lambda) &= \Pi_{i=1}^n f(x_i;\lambda) \\ &= \Pi_{i=1}^n \lambda\exp(-\lambda x_i) \\ &= \lambda^n \exp(-\lambda\Sigma_{i=1}^n x_i) \end{aligned}$$

3.2. *Distribusi Posterior dengan Berbagai Distribusi Prior*

3.2.1. *Distribusi Gamma sebagai Distribusi Prior Konjugat*

Misalkan dipilih peubah acak λ berdistribusi Gamma(α, β) dengan $\alpha, \beta > 0$ dinotasikan dengan $\lambda \sim$ Gamma(α, β) sebagai prior konjugat. Fungsi kepekatan peluang dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$f(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}\exp(-\lambda\beta), \qquad \lambda > 0 \qquad (3.1)$$

Fungsi *likelihood* dikalikan dengan distribusi prior menghasilkan:

$$f(\lambda)f(x|\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{n+\alpha-1}exp(-\lambda(\Sigma_{i=1}^n x_i + \beta)) \qquad (3.2)$$

Selanjutnya integralkan fungsi *likelihood* dengan distribusi posterior terhadap λ, sehingga menghasilkan:

$$\int_{-\propto}^{\propto} f(\lambda)f(x|\lambda)d\lambda = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{(\Sigma_{i=1}^{n} x_i + \beta)^{n+\alpha}} \Gamma(n+\alpha) \quad (3.3)$$

Dengan demikian, distribusi posterior dapat diperoleh dengan:

$$\begin{aligned} f(\lambda|x) &= \frac{f(\lambda)f(x|\lambda)}{\int_{-\propto}^{\propto} f(\lambda)f(x|\lambda)d\lambda} \\ &= \frac{\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{n+\alpha-1}\exp(-\lambda(\Sigma_{i=1}^{n} x_i + \beta))}{\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{(\Sigma_{i=1}^{n} x_i + \beta)^{n+\alpha}}\Gamma(n+\alpha)} \\ &= \frac{(\Sigma_{i=1}^{n} x_i + \beta)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)}\lambda^{n+\alpha-1}\exp(-\lambda(\Sigma_{i=1}^{n} x_i + \beta)) \end{aligned}$$

Atau dapat dinyatakan dengan:

$$\lambda_1|x \sim Gamma(n+\alpha, \Sigma_{i=1}^{n} x_i + \beta)$$

3.2.2. *Metode Jeffrey sebagai Distribusi Prior Non-Informatif*

Salah satu bentuk pendekatan dari prior non-informatif adalah dengan menggunakan metode Jeffrey. Dalam aplikasinya, prior Jeffrey diperluas menjadi perluasan Jeffrey yang dinyatakan dalam bentuk:

$$f(\lambda) = k[I(\lambda)]^{c}$$

Pertama akan ditentukan informasi Fisher yang diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x|\lambda) &= \lambda^{n}\exp(-\lambda\Sigma_{i=1}^{n} x_i) \\ lnf(x|\lambda) &= n\ln(\lambda) - \lambda\Sigma_{i=1}^{n} x_i \\ \frac{dln[f(x|\lambda)]}{d\lambda} &= n\frac{1}{\lambda} - \Sigma_{i=1}^{n} x_i \\ \frac{d^2ln[f(x|\lambda)]}{d\lambda^2} &= n\frac{-n}{\lambda^2} \\ I(\lambda) &= -nE(\frac{d^2ln[f(x|\lambda)]}{d\lambda^2} \\ &= \frac{n^2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

sehinggadiperoleh perluasan distribusi prior Jeffrey untuk distribusi Eksponensial adalah:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= k[I(\lambda)]^{c} \\ &= k\frac{n^2c}{\lambda^2c} \end{aligned}$$

dengan k adalah konstanta, c > 0 sebagai konstanta Jeffrey, dan n adalah jumlah sampel. Fungsi *likelihood* dikalikan dengan distribusi prior menghasilkan:

$$f(\lambda)f(x|\lambda) = (kn^{2c})(\lambda^{n-2c})\exp(-\lambda\Sigma x_i) \quad (3.4)$$

Selanjutnya integralkan fungsi *likelihood* dengan distribusi prior terhadap λ, sehingga menghasilkan:

$$\int_{0}^{\propto} f(\lambda)f(x|\lambda)d(\lambda) = \frac{(kn^{2c})}{(\Sigma_{i-1}^{n} x_i)^{n-2c+1}}\Gamma(n-2c+1) \quad (3.5)$$

Dengan demikian, distribusi posterior diperoleh sebagai berikut:

$$f(\lambda|x) = \frac{(kn^{2c})(\lambda^{n-2c})\exp(-\lambda\Sigma x_i)}{\frac{(kn^{2c})}{(\Sigma_{i-1}^{n} x_i)^{n-2c+1}}\Gamma(n-2c+1)}$$

$$= \frac{(\Sigma_{i-1}^{n} x_i)^{n-2c+1}(\lambda^{n-2c})\exp(-\lambda\Sigma x_i)}{\Gamma(n-2c+1)} \tag{3.6}$$

Atau dapat dinyatakan dengan:

$$\lambda_2|x \sim Gamma(n-2c+1, \Sigma_{i=1}^{n} x_i)$$

Table 3.1 Hasil Uraian Secara Analitik Distribusi Posterior dengan Menggunakan Distribusi Prior

Kriteria	Jenis Distribusi Prior	
	Gamma	Jeffrey
Distribusi posterior	$Gamma\ (n+\alpha, \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta)$	$Gamma\ (n-2c+1, \sum_{i=1}^{n} x_i)$
Posterior min	$\frac{n+\alpha}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta}$	$\frac{n-2c+1}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$
Posterior variansi	$\frac{n+\alpha}{(\sum_{i=1}^{n} x_i + \beta)^2}$	$\frac{n-2c+1}{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}$

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, diketahui bahwa untuk distribusi prior Gamma dan distribusi prior Jeffrey diperoleh distribusi posteriornya proporsional dengan distribusi Gamma.

Daftar Pustaka

[1] Al-Kutubi dan Ibrahim, N.A. 2009. Bayes Estimator for Exponential Distribution with Extension of Jeffrey Prior Information.*Malaysian Journal of Mathematical Sciences*. **3**(2): 297-313.
[2] Bain, L.J. dan M. Engelhardt. 1992.*Introduction to Probability and Mathematical Statistic*.Second Edition. Duxbury Press, California.
[3] Bolstad, W.M. 2007.*Introduction to Bayesian Statistics*. Second Edition. John Wiley dan Sons, America.
[4] Box, G.E.P. dan G.C. Tiao. 1973.*Bayesian Inference in Statistical Analysis*. Second Edition. Addison-Weshley Publishing Company, London.

[5] Burnham, P.K. dan D.R. Anderson. 2002.*Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*. Second Edition. Springer-Verlag, New York.

[6] Walpole, E.R. 1986.*Pengantar Statistika*. Edisi Ketiga. PT. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.

[7] Walpole, R.E dan R.H Myers.1995.*Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Edisi Keempat. ITB, Bandung.