Jurnal Matematika UNAND
Vol. **4** No. **2** Hal. 89 – 94
ISSN : 2303–2910

DIMENSI METRIK DARI GRAF BARBEL B_{2n} , $n \geq 3$

FITRI RAHMADANI, SYAFRUDDIN
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : fitri.rahmadani92@yahoo.com

Abstrak. Misalkan G adalah graf terhubung dengan $V(G)$ adalah himpunan titik G. Misalkan $W \subseteq V(G)$, dimana $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$. Untuk sebarang titik $v \in V(G)$, representasi titik v tehadap W dapat ditulis sebagai

$$r(v|W) = (d(v_i, w_1), d(v_i, w_2), \cdots, d(v_i, w_k)),\ i = 1, 2, \cdots, n,\ 1 \leq k \leq n.$$

Jika representasi setiap titik di $V(G)$ terhadap W berbeda, maka himpunan W disebut sebagai *resolving set*. *Resolving set* dengan kardinalitas minimum disebut *resolving set minimum* atau *basis*, sementara kardinalitasnya dinamakan *dimensi metrik*, dinotasikan $dim(G)$. Misalkan terdapat dua graf siklus C_n, $n \geq 3$ dengan himpunan titik C_n pertama $V(C_{n1}) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ dan himpunan titik C_n kedua $V(C_{n2}) = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$. Tulisan ini mengkaji kembali makalah [1], yang membahas tentang penentuan dimensi metrik dari graf barbel B_{2n}, dengan $B_{2n} \simeq 2C_n + \{x_n y_n\}$, dimana diperoleh bahwa $dim(B_{2n}) = 2$.

Kata Kunci: Dimensi Metrik, *Resolving set*, Graf Barbel

1. Pendahuluan

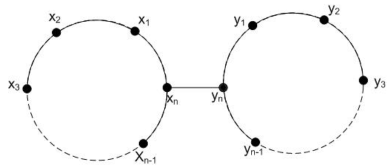
Teori graf adalah bagian dari matematika diskrit yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan atau menyatakan suatu persoalan agar lebih mudah dimengerti dan diselesaikan. Pada teori graf terdapat istilah dimensi metrik yang diperkenalkan oleh Harary dan Melter pada tahun 1976 melalui makalah mereka yang berjudul *On the metric dimension of a graph.*

Representasi dari suatu titik dapat dianggap sebagai vektor atau koordinat yang menunjukkan lokasi titik tersebut relatif terhadap subhimpunan yang dipilih. Misalkan G suatu graf terhubung. Jarak $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v pada graf G. Misalkan terdapat himpunan terurut $W \subseteq V(G)$, dengan $W = \{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$ untuk setiap $v \in V(G)$, representasi titik v tehadap W dapat ditulis sebagai $r(v|W) = (d(v, w_1),\ d(v, w_2),\ \cdots, d(v, w_k))$. Himpunan W dinamakan *resolving set* untuk G jika semua titik di G mempunyai representasi yang berbeda. *Resolving set* dengan kardinalitas minimum disebut *resolving set* minimum atau *basis* untuk G, sementara kardinalitas dari *resolving set* tersebut dinotasikan $\dim(G)$.

Misalkan terdapat dua graf siklus, dinotasikan dengan C_{n1} dan C_{n2} dengan himpunan titik berturut-turut sebagai berikut.

$$V(C_{n1}) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\},\ \text{dan}\ V(C_{n2}) = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}.$$

Graf Barbel B_{2n}, $n \geq 3$ didefinisikan sebagai graf yang berasal dari dua graf C_{n1} dan C_{n2}, dengan cara menambahkan satu sisi $x_n y_n$ ke graf $C_{n1} \cup C_{n2}$, seperti yang terlihat pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Graf $B_{2n} \simeq 2C_n + \{x_n y_n\}$

2. Teorema Pendukung

Teorema 2.1. [3] *Misalkan G adalah graf terhubung dengan banyak titik $n \geq 2$ dan diameter d maka $f(n,d) \leq \dim(G) \leq n - d$ dengan $f(n,d)$ adalah bilangan bulat tak negatif terkecil k yang memenuhi hubungan $d^k \geq n - k$.*

Pada Teorema 2.2 berikut telah ditunjukkan bahwa satu-satunya graf dengan dimensi metrik 1 adalah graf lintasan P_n.

Teorema 2.2. [3] *Misalkan G adalah graf terhubung dengan banyak titiknya n, maka* $\dim(G) = 1$ *jika dan hanya jika $G \simeq P_n$.*

Bukti. Misalkan $G \simeq P_n$, akan dibuktikan bahwa $\dim(G) = 1$. Karena jarak maksimal antara sebarang dua titik di G sebanyak n titik maka $diam(G) = n - 1$, berdasarkan Teorema 2.1, batas bawah untuk $dim(G)$ adalah bilangan bulat positif k terkecil yang memenuhi $(n-1)^k \geq n - k$. Jelas bahwa bilangan yang dimaksud adalah $k = 1$. Dengan demikian,

$$1 \leq \dim(G), \tag{2.1}$$

dan juga menurut Teorema 2.1,

$$\dim(G) \leq n - (n-1) = 1. \tag{2.2}$$

Dari (2.1) dan (2.2) dapat disimpulkan bahwa $dim(G) = 1$.

Sebaliknya, misalkan $\dim(G) = 1$. Akan dibuktikan $G \cong P_n$. Karena $\dim(G) = 1$ maka terdapat *basis* $W = \{w\}$. Untuk setiap v di G, $r(v|W) = d(v,w)$ adalah bilangan bulat positif kurang dari n. Karena W *basis* maka untuk setiap $v_i \in G, 1 \leq i \leq n$ berlaku $0 \leq r(v_i|W) = d(v_i, w) < n$ dan terdapat sebanyak n buah representasi yang berbeda satu sama lain. Haruslah seluruh representasi berbentuk

$$(0), (1), (2), \ldots, (n-1). \tag{2.3}$$

Sehingga dapat dilihat bahwa diameter dari graf G adalah $n - 1$, maka $G \simeq P_n$. $\square$

3. Dimensi Metrik dari Graf Barbel

Misal B_{2n} adalah graf barbel dengan

$$\begin{aligned} V(B_{2n}) &= \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \cup \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}, \\ E(B_{2n}) &= E(C_{n1}) \cup E(C_{n2}) \cup \{x_n y_n\}, \\ &= \{x_i x_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_i y_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_n y_n\}. \end{aligned}$$

Pada tulisan ini akan dikaji kembali makalah [1] yang membahas tentang penentuan dimensi metrik dari graf barbel B_{2n}, dimana $B_{2n} \simeq 2C_n + \{x_n y_n\}, n \geq 3$.

Teorema 3.1. [1] *Misalkan $n \geq 3$ dan terdapat graf $B_{2n} \simeq 2C_n + \{x_n y_n\}$. Maka* $\dim(B_{2n}) = 2$.

Bukti. Berdasarkan Teorema 1, $\dim(G) \geq 2$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat suatu *resolving set* W dengan banyak anggota 2 dengan representasi kedua titik tersebut terhadap titik-titik lainnya berbeda.

Misalkan $W = \{x_1, y_1\}$ adalah suatu *resolving set* dari G dengan kardinalitas minimum. Secara umum, pandang dua kasus, yaitu untuk n bilangan genap positif dan n bilangan ganjil positif.

- **Kasus 1**. Untuk n bilangan genap positif, tulis $n = 2k$ dengan $k \in \mathbb{N}$. Representasi semua titik dari $V(B_n) \backslash \{y_1, x_1\}$ adalah sebagai berikut.

$$r(x_{i+1}|W) = \begin{cases} (i, i+3), & \text{untuk } 1 \leq i \leq k-1, \\ (n-i, n-i+1), & \text{untuk } k \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

$$r(y_{i+1}|W) = \begin{cases} (i+3, i), & \text{untuk } 1 \leq i \leq k-1, \\ (n-i+1, n-i), & \text{untuk } k \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Diperoleh representasi untuk setiap titik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} r(x_2 \mid W) &= (1, 4), \\ r(x_3 \mid W) &= (2, 5), \\ r(x_k \mid W) &= ((k-1), (k+2)), \\ r(x_{k+1} \mid W) &= ((n-k), (n-k+1)), \\ r(x_{k+2} \mid W) &= (n-(k+1), (n-(k+1)+1)), \\ &\vdots \\ r(x_{n-(n-1)} \mid W) &= (n-1, n), \\ r(y_2 \mid W) &= (4, 1), \\ r(y_3 \mid W) &= (5, 2), \\ r(y_k \mid W) &= ((k+2), (k-1)), \\ r(y_{k+1} \mid W) &= ((n-k+1), (n-k)), \\ r(x_{k+2} \mid W) &= ((n-(k+1)+1), (n-(k+1))), \\ &\vdots \\ r(y_{n-(n-1)} \mid W) &= (n, n-1). \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa representasi setiap titik berbeda.

- **Kasus 2**. Untuk n bilangan ganjil positif, $n = 2k + 1$ dengan $k \in \mathbb{N}$. Representasi semua titik dari $V(B_n)\backslash\{y_1, x_1\}$ adalah sebagai berikut.

$$r(x_{i+1}|W) = \begin{cases} (i, i+3), & \text{untuk } 1 \leq i \leq k-1, \\ (k, k+2), & \text{untuk } i = k, \\ (n-i, n-i+1), & \text{untuk } k+1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

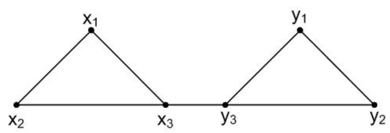
$$r(y_{i+1}|W) = \begin{cases} (i+3, i), & \text{untuk } 1 \leq i \leq k-1, \\ (k+2, k), & \text{untuk } i = k, \\ (n-i+1, n-i), & \text{untuk } k+1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

Diperoleh representasi untuk setiap titik sebagai berikut.

$$\begin{aligned} r(x_2 \mid W) &= (1, 4), \\ r(x_3 \mid W) &= (2, 4), \\ r(x_k \mid W) &= (k, (k+2)), \\ r(x_{k+1} \mid W) &= ((n-k), (n-k+1)), \\ r(x_{k+2} \mid W) &= (n-(k+2), (n-(k+2)+1)), \\ &\vdots \\ r(x_{n-(n-1)} \mid W) &= (n-1, n), \\ r(y_2 \mid W) &= (4, 1), \\ r(y_3 \mid W) &= (4, 2), \\ r(y_k \mid W) &= ((k+2), (k-1)), \\ r(y_{k+1} \mid W) &= ((n-k+1), (n-k)), \\ r(x_{k+2} \mid W) &= ((n-(k+2)+1), (n-(k+2))), \\ &\vdots \\ r(y_{n-(n-1)} \mid W) &= (n, n-1). \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa representasi setiap titik berbeda. □

Contoh 3.2. Akan ditentukan dimensi metrik dari graf $B_6 \simeq 2C_3 + \{x_3y_3\}$.



Gambar 2. Graf $B_6 \simeq 2C_3 + \{x_3y_3\}$

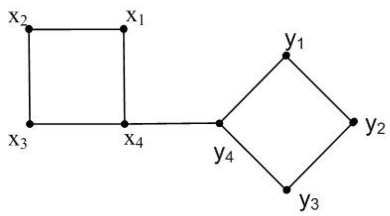
Pilih $W = \{x_1, y_1\}$, maka representasi setiap titik $2C_3 + \{x_3y_3\}$ terhadap W

adalah

$$\begin{aligned}
r(x_1 \mid W) &= (d(x_1, x_1), d(x_1, y_1)) = (0, 3),\\
r(x_2 \mid W) &= (d(x_2, x_1), d(x_2, y_1)) = (1, 3),\\
r(x_3 \mid W) &= (d(x_3, x_1), d(x_3, y_1)) = (1, 2),\\
r(y_1 \mid W) &= (d(y_1, x_1), d(y_1, y_1)) = (3, 0),\\
r(y_2 \mid W) &= (d(y_2, x_1), d(y_2, y_1)) = (3, 1),\\
r(y_3 \mid W) &= (d(y_3, x_1), d(y_3, y_1)) = (2, 1).
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa representasi setiap titik di $2C_3 + \{x_3y_3\}$ berbeda satu sama lain.

Contoh 3.3. Akan ditentukan dimensi metrik dari graf $B_8 \simeq 2C_4 + \{x_4y_4\}$. Pilih



Gambar 3. Graf $B_8 \simeq 2C_4 + \{x_4y_4\}$

$W = \{x_1, y_1\}$, maka representasi setiap titik $2C_4 + \{x_4y_4\}$ terhadap W adalah

$$\begin{aligned}
r(x_1 \mid W) &= (d(x_1, x_1), d(x_1, y_1)) = (0, 3),\\
r(x_2 \mid W) &= (d(x_2, x_1), d(x_2, y_1)) = (1, 4),\\
r(x_3 \mid W) &= (d(x_3, x_1), d(x_3, y_1)) = (2, 3),\\
r(x_4 \mid W) &= (d(x_4, x_1), d(x_4, y_1)) = (1, 2),\\
r(y_1 \mid W) &= (d(y_1, x_1), d(y_1, y_1)) = (3, 0),\\
r(y_2 \mid W) &= (d(y_2, x_1), d(y_2, y_1)) = (4, 1),\\
r(y_3 \mid W) &= (d(y_3, x_1), d(y_3, y_1)) = (3, 2),\\
r(y_4 \mid W) &= (d(y_4, x_1), d(y_4, y_1)) = (2, 1).
\end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa representasi setiap titik di $2C_4 + \{x_4y_4\}$ berbeda satu sama lain.

4. Kesimpulan

Misalkan terdapat dua graf siklus C_{n1} dan C_{n2} dengan himpunan titik berturut-turut sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
V(C_{n1}) &= \{x_1, x_2, \cdots, x_n\},\\
V(C_{n2}) &= \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}.
\end{aligned}$$

Graf Barbel B_{2n}, $n \geq 3$ didefinisikan sebagai graf yang berasal dari dua graf C_{n1} dan C_{n2}, dengan cara menambahkan satu sisi $x_n y_n$ ke graf $C_{n1} \cup C_{n2}$. Dalam tulisan ini telah dikaji kembali makalah [1], yang menentukan bahwa dimensi metrik dari graf barbel B_{2n}, dengan $B_{2n} \simeq 2C_n + \{x_n y_n\}$ adalah 2.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Narwen, M.Si, Bapak Budi Rudianto, M.Si dan Bapak Zulakmal, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

[1] A. Murtaza, A. Gohar, A. Usman, Rahim M.T. 2012. On Cycle Related Graphs with Constant Metric Dimension. *Journal of Discrete Mathematics* **2**: 21 – 23

[2] Bondy, J.A, dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Applications*. The Macmillan Press Ltd.

[3] Chartrand, G., Eroh, L., Jhonson, M., dan Oellerman, O.R. 2000. Resolvability in graph and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics* **105**: 99 – 107

[4] Eka Septiana, dan Rahardjeng Budi, S.Si, M.Si. 2014. Dimensi Metrik Pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang, dan Graf Bipartit Komplit. Jurnal MATHunesa Vol **3** (1): 1 – 6