Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VIII** No. **1** Hal. 1– 8
Edisi Mei 2019
ISSN : 2303–291X

PENENTUAN BILANGAN KROMATIK LOKASI PADA GRAF TANGGA SEGITIGA DIPERUMUM Tr_n UNTUK $n = 2$ dan $n = 3$

Sutra Lidya Pritama, Des Welyyanti, Narwen
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : Sutralidya@gmail.com

Diterima xx Maret 2019 Direvisi xx April 2019 Dipublikasikan xx Mei 2019

Abstrak. Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$ suatu graf terhubung. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ merupakan partisi dari $V(G)$ ke dalam kelas-kelas warna yang saling bebas, dimana S_i merupakan himpunan titik-titik yang berwarna i dengan $1 \leq i \leq k$. Berdasarkan suatu pewarnaan titik, maka representasi v terhadap Π disebut kode warna dari v, dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari suatau titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai k-vektor,

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k)),$$

dimana $d(v, S_1) = min\{d(v, x)|x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda terhadap Π, maka c disebut pewarnaan lokasi. Oleh karena itu suatu pewarnaan lokasi G adalah pewarnaan yang membedakan setiap titik di G berdasarkan jaraknya terhadap kelas warna yang dihasilkan. Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi, dinotasikan $\chi_L(G)$. Pada tulisan ini akan dibahas bilangan kromatik lokasi dari graf tangga segitiga diperumum Tr_n untuk $n = 2$ dan $n = 3$.

Kata Kunci: Bilangan kromatik lokasi, Kelas warna, Kode warna, Graf tangga segitiga diperumum Tr_n

1. Pendahuluan

Pewarnaan titik dari graf $G = (V, E)$ merupakan suatu pemetaan $c : V(G) \to N$ sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ untuk setiap $u, v \in V(G)$ yang bertetangga. Apabila warna yang digunakan sebanyak k maka G dikatakan mempunyai k-pewarnaan. Bilangan bulat terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pewarnaan titik disebut **bilangan kromatik** yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, ..., S_k\}$ merupakan partisi dari $V(G)$ ke dalam kelas - kelas warna yang saling bebas, dimana S_i merupakan himpunan titik - titik yang berwarna i dengan $1 \leq i \leq k$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari titik V merupakan vektor dengan banyak k unsur yaitu,

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), ..., d(v, S_k))$$

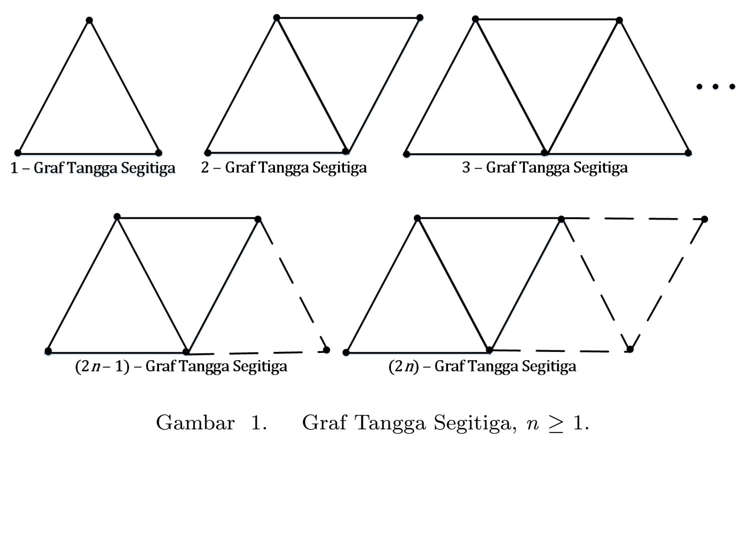
dimana $d(v, S_i) = min\{d(v, x)|x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda pada G mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π, maka c disebut **pewarnaan lokasi*(locating coloring)***. Oleh karena itu suatu pewarnaan lokasi G adalah pewarnaan yang membedakan setiap titik di G berdasarkan jaraknya terhadap kelas warna yang dihasilkan. Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut **bilangan kromatik lokasi *(locating chromatic number)*** dari G yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ [3].

2. Definisi dan Terminologi Graf

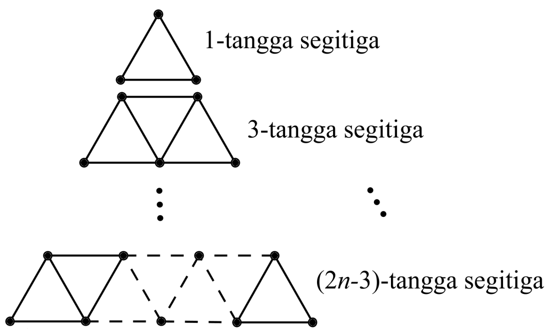
Suatu graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan terurut $G = (V, E)$ dengan $V(G)$ himpunan tak kosong yang elemen - elemennya dinamakan **titik** (*vertex*) dari G dan $E(G)$ merupakan pasangan - pasangan yang tak berurut dari titik (*vertex*) yang disebut **sisi** (*edge*) dari G. Banyaknya titik pada graf G disebut **orde** yang dinotasikan dengan $|V(G)|$ sedangkan banyaknya sisi pada graf G disebut **ukuran** (*size*) yang dinotasikan dengan $|E(G)|$.

Graf tangga adalah graf yang diperoleh dari hasil kali graf lintasan P_2 dan P_n. Selanjutnya, graf tangga segitiga diperoleh dari kumpulan segitiga-segitiga terhubung. Misalkan T adalah kumpulan segitiga-segitiga terhubung, maka T adalah graf planar terhubung dengan siklus terpendek tiga dan masing-masing segitiga beririsan pada paling sedikit satu sisi dengan lainnya. Kumpulan segitiga terhubung disebut *triomino*. T disebut *n-triomino* jika T adalah susunan dari n segitiga yang terhubung. Graf tangga segitiga dengan panjang n adalah *n-triomino* yang di-susun secara mendatar dengan menempatkan n segitiga dengan cara seperti pada Gambar 1 [4] yang dinotasikan dengan n-graf tangga segitiga.

Graf piramida dengan n baris, ditulis Pr_n adalah graf yang dibentuk dengan menempatkan 1-tangga segitiga, 3-tangga segitiga ,. . . , $(2n - 3)$-tangga segitiga seperti pada gambar 2 [5]. Titik paling atas dari graf piramida dinamakan sebagai titik puncak dan titik paling bawah dari graf piramida dinamakan sebagai titik-titik bawah.



Gambar 1. Graf Tangga Segitiga, $n \geq 1$.



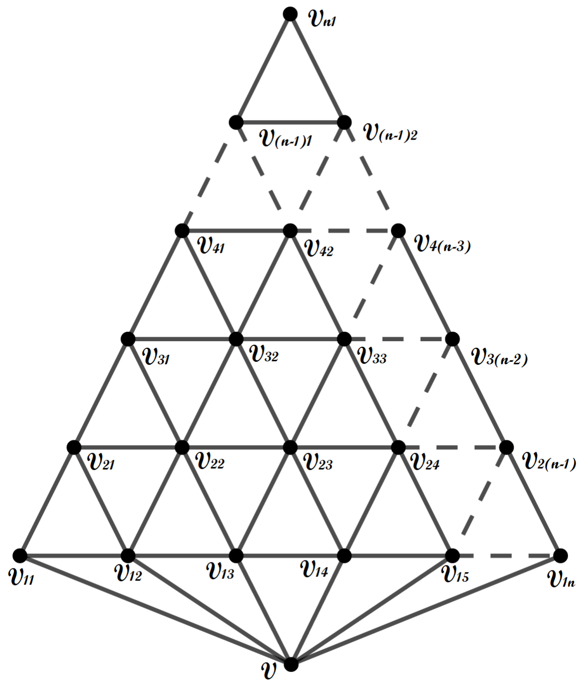
Gambar 2. Graf Piramida dengan n baris.

Berdasarkan Gambar 2, dengan menambahkan satu titik di bawah graf piramida, dinamakan titik dasar (titik utama) dan sebanyak n sisi tertentu yang menghubungkan titik dasar dengan titik-titik bawah pada graf piramida, maka diperoleh graf tangga segitiga yang diperumum yang dinotasikan sebagai Tr_n, untuk $n \geq 2$, dengan n merupakan banyaknya sisi yang terkait dengan titik utama [6].

Dengan demikian diperoleh bentuk umum dari graf tangga segitiga yang diperumum adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} V(Tr_n) =& \ \{v\} \cup \{v_{ij} |\ 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-i+1\}, \text{ dan} \\ E(Tr_n) =& \ \{vv_{1j} |\ 1 \leq j \leq n\}, \\ & \cup \{v_{ij}v_{i(j+1)} |\ 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-i\}, \\ & \cup \{v_{ij}v_{(i+1)j} |\ 1 \leq i \leq n-j, 1 \leq j \leq n-1\}, \\ & \cup \{v_{ij}v_{(i+1)(j-1)} |\ 1 \leq i \leq j-1, 2 \leq j \leq n\}. \end{aligned}$$

Berdasarkan bentuk umum di atas, dapat dilihat titik pada graf tangga segitiga diperumum dinamakan titik v_{ij}, dimana i merupakan banyaknya tingkatan pada graf dan j merupakan urutan titik pada setiap tingkatan yang sama pada graf. Pada Gambar 3 diberikan contoh untuk graf tangga segitiga yang diperumum (Tr_n) :



Gambar 3. Graf Tangga Segitiga yang Diperumum Tr_n dengan $n \geq 2$.

3. Bilangan Kromatik Lokasi Pada Graf Tangga Segitiga Diperumum Tr_n

Teorema 3.0.1$\diamondsuit$ Misalkan Tr_n adalah graf tangga segitiga diperumum dimana n menyatakan banyaknya sisi yang terkait dengan titik utama maka

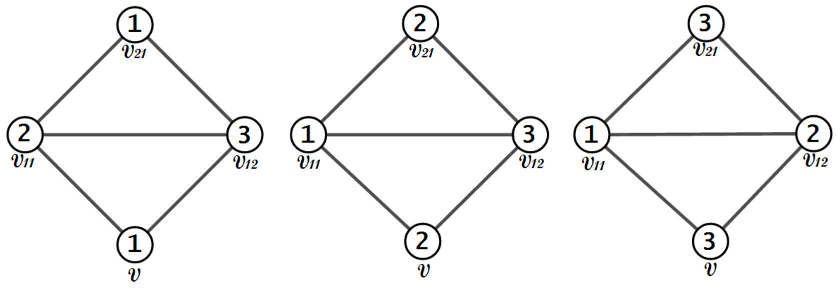
$$\chi_L(Tr_n) \;=\; 4, \qquad \text{untuk} \quad n = 2 \; dan \; n = 3,$$

Bukti. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi dari graf tangga segitiga diperumum Tr_n dan $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, \cdots, S_k\}$ adalah partisi titik-titik pada graf Tr_n, dimana S_i sebagai kelas warna ke-i untuk $1 \leq i \leq k$. Akan dibuktikan bilangan kromatik lokasi graf tangga segitiga diperumum Tr_n dengan $n = 2$ dan $n = 3$. Pandang beberapa kasus berikut.

Kasus 1. Akan ditunjukkan $\chi_L(Tr_n) = 4$ untuk $n = 2$.

Pertama, akan ditunjukkan $\chi_L(Tr_n) \geq 4$. Andaikan $\chi_L(Tr_n) = 3$ untuk $n = 2$ akan diberikan semua kemungkinan pewarnaan dengan tiga warna seperti pada Gambar 4 :

Berdasarkan Gambar 4 dapat dilihat bahwa Tr_2 mempunyai $3-pewarnaan$ lokasi, maka terdapat dua titik dominan dengan warna yang sama pada pewarnaan lokasi



Gambar 4. Graf Tangga Segitiga Diperumum Tr_2 dengan $\chi_L(Tr_2) = 3$.

tersebut. Artinya dua titik tersebut mempunyai kode warna yang sama. Hal ini kontradiksi dengan definisi pewarnaan lokasi yang menyatakan setiap titik di Tr_2 haruslah memiliki kode warna yang berbeda maka dapat di-simpulkan bahwa $\chi_L(Tr_2) \geq 4$.
Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(Tr_2) \leq 4$ untuk $n = 2$. Misalkan didefinisikan pewarnaan titik di Tr_2 sebagai $c : V(Tr_2) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sedemikian sehingga:

$c(v_{11}) = 1$,
$c(v_{12}) = 2$,
$c(v_{21}) = 3$,
$c(v) = 4$.

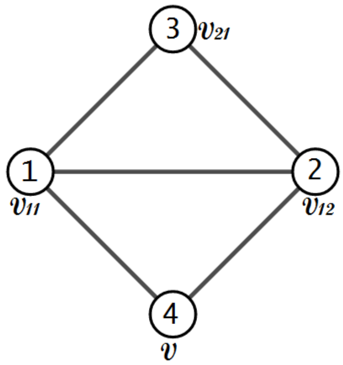
Berdasarkan konstruksi tersebut diperoleh kelas warna sebagai berikut;

$S_1 = \{v_{11}\}$
$S_2 = \{v_{12}\}$
$S_3 = \{v_{21}\}$
$S_4 = \{v\}$.

Akibatnya, diperoleh kode warna setiap titik di Tr_2 terhadap $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ sebagai berikut:

$c_\Pi(v_{11}) = (d(v_{11}, S_1), d(v_{11}, S_2), d(v_{11}, S_3), d(v_{11}, S_4)) = (0, 1, 1, 1)$,
$c_\Pi(v_{12}) = (d(v_{12}, S_1), d(v_{12}, S_2), d(v_{12}, S_3), d(v_{12}, S_4)) = (1, 0, 1, 1)$,
$c_\Pi(v_{21}) = (d(v_{21}, S_1), d(v_{21}, S_2), d(v_{21}, S_3), d(v_{21}, S_4)) = (1, 1, 0, 2)$,
$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), d(v, S_3), d(v, S_4)) = (1, 1, 2, 0)$.

Berdasarkan kode warna yang diperoleh dapat dilihat bahwa setiap titik pada Tr_2 memiliki kode warna yang berbeda maka c merupakan pewarnaan lokasi pada graf Tr_2, sehingga diperoleh $\chi_L(Tr_2) \leq 4$ untuk $n = 2$. Dari pembuktian dapat dilihat bahwa $\chi_L(Tr_2) \leq 4$ dan $\chi_L(Tr_2) \geq 4$ sehingga dapat disimpulkan $\chi_L(Tr_2) = 4$ untuk $n = 2$. (Lihat Gambar 5).
Kasus 2. Akan ditunjukkan $\chi_L(Tr_n) = 4$ untuk $n = 3$.
Pertama, akan ditunjukkan $\chi_L(Tr_3) \geq 4$. Pada Kasus 1 dapat dilihat bahwa



Gambar 5. Graf Tangga Segitiga Diperumum Tr_2.

$\chi_L(Tr_2) = 4$, karena pewarnaan Tr_3 mengikuti pewarnaan Tr_2 maka haruslah warna di Tr_3 paling sedikit sama dengan warna di Tr_2 sehingga diperoleh $\chi_L(Tr_3) \geq 4$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(Tr_3) \leq 4$ untuk $n = 3$.
Didefinisikan pewarnaan titik terhadap graf Tr_3 sebagai $c : V(Tr_3) \to \{1, 2, 3, 4\}$ sedemikian sehingga:

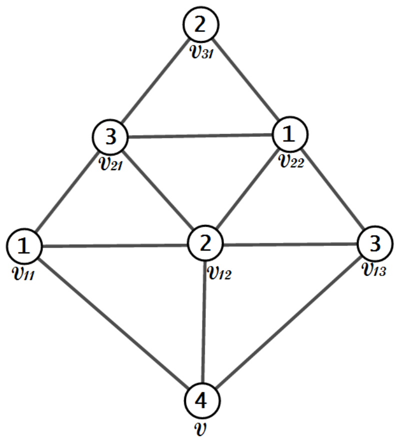
$c(v_{11}) = c(v_{22}) = 1$
$c(v_{12}) = c(v_{31}) = 2$
$c(v_{13}) = c(v_{21}) = 3$
$c(v) = 4$.

Berdasarkan konstruksi tersebut diperoleh kelas warna sebagai berikut:

$S_1 = \{v_{11}, v_{22}\}$
$S_2 = \{v_{12}, v_{31}\}$
$S_3 = \{v_{13}, v_{21}\}$
$S_4 = \{v\}$.

Berdasarkan Gambar 6 dapat dilihat bahwa Tr_3 diwarnai mengikuti pewarnaan Tr_2 maka diperoleh kode warna setiap titik di Tr_2 terhadap Π sama dengan kode warna setiap titik di Tr_3 terhadap Π,hanya saja Tr_3 memiliki kode warna tambahan yaitu :

$c_\Pi(v_{13}) = (d(v_{13}, S_1), d(v_{13}, S_2), d(v_{13}, S_3), d(v_{13}, S_4)) = (1, 1, 0, 1)$,
$c_\Pi(v_{22}) = (d(v_{22}, S_1), d(v_{22}, S_2), d(v_{22}, S_3), d(v_{22}, S_4)) = (0, 1, 1, 2)$,
$c_\Pi(v_{31}) = (d(v_{31}, S_1), d(v_{31}, S_2), d(v_{31}, S_3), d(v_{31}, S_4)) = (1, 0, 1, 3)$.



Gambar 6. Graf Tangga Segitiga Diperumum Tr_3.

Pada Tr_3 memiliki perbedaan di kode warna $c_\Pi(v) = (1, 1, 1, 0)$. Berdasarkan kode warna di atas dapat dilihat bahwa setiap titik di Tr_3 memiliki kode warna yang berbeda sehingga diperoleh $\chi_L(Tr_3) \leq 4$ untuk $n = 3$. Dari pembuktian di atas dapat dilihat bahwa $\chi_L(Tr_3) \leq 4$ dan $\chi_L(Tr_3) \geq 4$ untuk $n = 3$ sehingga dapat disimpulkan $\chi_L(Tr_3) = 4$. ■

4. Kesimpulan

Pada tugas akhir ini diambil kasus untuk $n = 2$ dan $n = 3$ dimana n merupakan banyaknya sisi yang terkait dengan titik utama sehingga diperoleh bilangan kromatik lokasi dari graf tangga segitiga diperumum Tr_n sebagai berikut:

$$\chi_L(Tr_n) = 4, \qquad \text{untuk} \quad n = 2 \; dan \; n = 3,$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada ibu Dr. Lyra Yulianti, ibu Dr. Arrival Rince Putri, dan ibu Dr. Susila Bahri selaku dosen penguji tugas akhir yang telah memberikan masukkan dan saran sehingga makalah ini dapat di-selesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bondy, J.A dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Application*. London: The Macmillan Press LTD.

[2] Chartrand, G., M.A. Henning, P.J. Slater, dan P. Zhang. 2002. *The locating-chromatic number of a graph*. Bull.Inst. Combin. Appl.36.

[3] Chartrand, G., dkk . 2003. Graphs of order n with locating-cromatic number n - 1. *Science Direct, Dirscrete Math.* 269: 65-79.

[4] Shulhany, M.A dan A. N. M Salman. 2015. Bilangan terhubung pelangi graf berlian. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Mate-matika UMS 2015.* **1**:916-924

[5] Yanti, Helma. 2014. Analisis Graf Piramida, Graf Berlian, dan Graf Bintang Sebagai Graf Perfect. *Tesis S-2, unpublished.* Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau

[6] Yulianti, L., Narwen dan Shelli Fitrianda. " *On the Rainbow Connection Number and Strong Rainbow Connection Number of Generalized Triangle Ladder Graph*",submitted.