Jurnal Matematika UNAND
Vol. **2** No. **3** Hal. 91 – 97
ISSN : 2303–291X

ANALISA *STEADY STATE ERROR* SISTEM KONTROL LINIER *INVARIANT* WAKTU

FANNY YULIA SARI
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
fani_yes@yahoo.com

Abstrak. Dalam penelitian ini akan dikaji *steady state error* sistem kontrol linier *invariant* waktu, khususnya untuk permasalah *feedback* kontrol, yang mana jika diberikan input baru fungsi tangga satuan dan *output* pada *steady state* tidak sama dengan perilaku *input*. Kajian ini dimulai dari menghitung *error* sistem yang telah stabil dan mencapai *steady state*, selanjutnya *error* yang ada akan dieleminir dengan penambahan kontrol integral.

Kata Kunci: Sistem persamaan linier, transformasi Laplace, fungsi Transfer

1. Pendahuluan

Sistem kontrol (*control system*) merupakan suatu alat untuk mengendalikan dan mengatur keadaan dari suatu sistem. Dalam merancang suatu sistem kontrol, perancang harus dapat meramalkan perilaku dinamis sistem yang dirancang tersebut dengan mengetahui perilaku komponen-komponen yang terkait. Karakteristik utama tentang perilaku dinamis dari suatu sistem kontrol adalah kestabilan, yaitu apakah sistem tersebut stabil atau tidak [4].

Untuk suatu sistem kontrol *invariant* waktu,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

di mana $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor keadaan, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ menyatakan vektor *input*, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ menyatakan vektor *output* (respon), $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, dan $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, kestabilannya diperlihatkan oleh perilaku *output* bila $t \to \infty$. Suatu sistem dikatakan mencapai *steady state* jika sistem dapat mempertahankan kestabilannya pada saat $t \to \infty$.

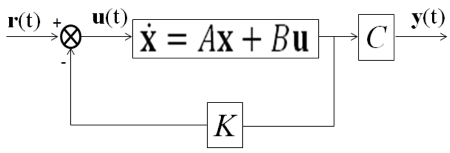
Karena suatu sistem kontrol melibatkan penyimpanan energi, maka *output* tidak dapat langsung mengikuti perilaku *input* tetapi dapat memperlihatkan respon peralihan (*transient response*) sebelum sistem mencapai kestabilannya. Respon peralihan ini dapat menyebabkan *error* pada sistem. Jika *output* pada *steady state* tidak sama dengan perilaku *input*, maka sistem dikatakan berada dalam keadaan *error* (*steady state error*).

2. Menghitung Nilai *Error*

Sebelum menganalisa *steady state error* terlebih dahulu perlu diketahui *output* dari sistem. Setelah *output* diperoleh, untuk menganalisa *steady state error* dari *output* sistem terhadap suatu *input* tertentu diperlukan teorema nilai akhir. Jika $\mathcal{F}(s)$ adalah transformasi Laplace dari $f(t)$ dan jika $\lim_{t\to\infty} f(t)$ ada, maka $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\mathcal{F}(s)$ [4]. Dalam menganalisa *steady state error* diasumsikan sistem (1.1) telah stabil dengan suatu kontrol *feedback*

$$\mathbf{u}(t) = -K\mathbf{x} \tag{2.1}$$

untuk suatu $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Gambar 2.1 berikut memperlihatkan perilaku sistem kontrol *feedback*. Selanjutnya, akan diselidiki *error* dari sistem tersebut jika diberikan



Gambar 2.1. Diagram Blok Sistem 1.1

suatu *input* $\mathbf{r}(t)$. Sebagaimana yang telah diuraikan sebelumnya bahwa *error* dari sistem akan ada jika perilaku *output* pada *steady state* tidak sama dengan *input*, dengan kata lain *error* merupakan selisih antara *output* dan *input*, yaitu

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t) \tag{2.2}$$

Besarnya *error* ini dapat dihitung dengan mengambil transformasi Laplace dari sistem (2.2), yaitu

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(s) &= \mathcal{R}(s) - \mathcal{Y}(s) \qquad (2.3)\\ &= \mathcal{R}(s) - [C(sI-A)^{-1}B]\mathcal{R}(s)\\ &= [I - C(sI-A)^{-1}B]\mathcal{R}(s). \qquad (2.4)\end{aligned}$$

di mana $\mathcal{E}(s)$, $\mathcal{R}(s)$ dan $\mathcal{Y}(s)$ berturut-turut merupakan transformasi Laplace dari $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{r}(t)$ dan $\mathbf{y}(t)$. Selanjutnya, dengan menggunakan teorema nilai akhir, *steady state error*, e_{ss}, untuk sistem (1.1) adalah

$$\begin{aligned}e_{ss} &= \lim_{t\to\infty} \mathbf{e}(t)\\ &= \lim_{s\to 0} s\mathcal{E}(s)\\ &= \lim_{s\to 0} s[I - C(sI-A)^{-1}B]\mathcal{R}(s)\\ &= \lim_{s\to 0} [I - C(sI-A)^{-1}B]s\mathcal{R}(s). \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Jika $\mathbf{r}(t)$ merupakan fungsi tangga satuan, yaitu

$$\mathcal{R}(s) = \frac{1}{s}, \tag{2.6}$$

maka *error* sistem (1.1) adalah

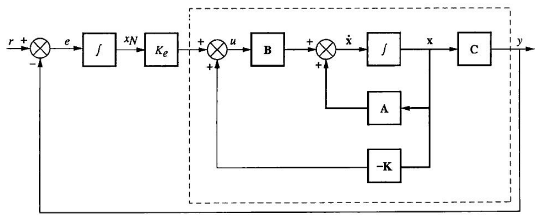
$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s\to 0}[I - C(sI-A)^{-1}B]s\mathcal{R}(s) \\ &= \lim_{s\to 0}[I - C(sI-A)^{-1}B]s\left(\frac{1}{s}\right) \\ e_{ss} &= \lim_{s\to 0}[I - C(sI-A)^{-1}B]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Jika disubstitusikan $s = 0$ maka $H(0) = -CA^{-1}B$ sehingga diperoleh *error* dengan *input* fungsi tangga satuan [3],

$$e_{ss} = I + CA^{-1}B. \tag{2.8}$$

3. Mengeliminir Nilai Error

Untuk memperkecil *steady state error* dapat dilakukan dengan menaikkan pangkat dari bentuk karakteristik sistem dengan menambahkan satu atau lebih kontrol integral (*integrator*) pada lintasan umpan maju. Dalam kasus ini kontrol integral yang digunakan adalah $K_e\mathbf{x}_N$ dengan $\mathbf{x}_N(t) \in \mathbb{R}^p$ dan $K_e \in \mathbb{R}^{m\times p}$ [3]. Situasi ini diperlihatkan pada Gambar 3.1 berikut. Dari Gambar 3.1, yang menyebabkan *error*



Gambar 3.1. Diagram Blok dengan Kontrol Integral

adalah

$$\dot{\mathbf{x}}_N(t) = \mathbf{r}(t) - C\mathbf{x}(t), \tag{3.1}$$

dan memiliki pengontrol sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= -K\mathbf{x}(t) + K_e\mathbf{x}_N(t) \\ &= -\begin{pmatrix} K & -K_e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_N \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dengan menggabungkan persamaan (1.1) dan (3.1) diperoleh

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (3.2) ke persamaan (3.3) diperoleh

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_N \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{cl} & BK_e \\ -C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

dengan $A_{cl} = A - BK$. Persamaan (3.4) merupakan persamaan ruang keadaan sistem linier *invarian* waktu yang telah ditambah kontrol integral [3].

4. Penerapan

Diberikan sistem linier kontinu sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{4.1}$$

a. Hitunglah *steady state error* dari sistem (4.1) dengan *input* fungsi tangga satuan.
b. Hitunglah *steady state error* dari sistem (4.1) dengan mengulangi pengontrolan [a] dan menambah kontrol integral.

Jawab

a. Untuk menentukan *output* sistem diperlukan nilai eigen dan vektor eigen dari sistem (4.1). Adapun nilai eigennya adalah -1, -3 dan vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen secara berturut-turut sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solusi sistem (4.1) adalah

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

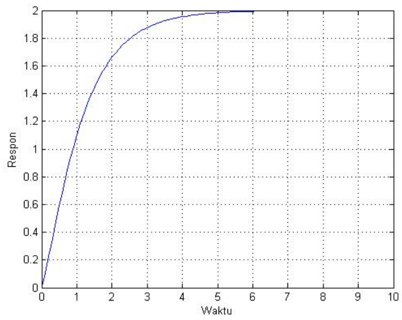
Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.2) kedalam *output* pada sistem (4.1), yang memberikan hasil sebagai berikut

$$y = \frac{-5}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t} + 2. \tag{4.3}$$

Persamaan (4.3) menghasilkan *output* sebagai pada Gambar 4.1 berikut.

Dari kurva *output* terlihat ada *error* pada sistem. Untuk menghitung *error* dari sistem (4.1) digunakan persamaan (2.8).

$$\begin{aligned} e_{ss} &= I + (CA^{-1}B) \\ &= I + \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 1 + (-2) \\ &= -1. \end{aligned}$$



Gambar 4.1. Respon Sistem 4.1

b. Pengontrolan dengan penambahan kontrol integral. Dengan menggunakan persamaan (3.4) maka ruang keadaan sistem (4.1) menjadi

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_N \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} K_e \\ \hline -\begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_N \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{r} \tag{4.4}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ (1-K_1) & (-2-K_2) & K_e \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{r}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_N \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (4.4) adalah

$$s^3 + (K_2 + 4)s^2 + (K_1 + 2K_2 + K_e)s + 6K_e = 0. \tag{4.5}$$

Selanjutnya, pilih nilai eigen yang ketiga dari sistem awal, yaitu $(s + 2)$ maka persamaan karakteristik dari sistem (4.1) adalah

$$(s + 2)(s^2 + 4s + 3) = 0 \tag{4.6}$$

Dengan membandingkan persamaan (4.5) dan (4.6) diperoleh

$$\begin{aligned} K_1 &= 3 \\ K_2 &= 2 \\ K_e &= 1. \end{aligned}$$

Substitusikan nilai K_1, K_2, dan K_e kedalam persamaan (4.4) maka diperoleh persamaan ruang keadaan

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathbf{r} \tag{4.7}$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_N \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Sebelum menentukan *error* perlu diperlihatkan *output* sistem (4.7), untuk menentukan *output* sistem diperlukan nilai eigen dan vektor eigen dari sistem tersebut. Adapun nilai eigennya adalah -1, -2, -3 dan vektor eigen yang berkaitan dengan nilai eigen secara berturut-turut sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

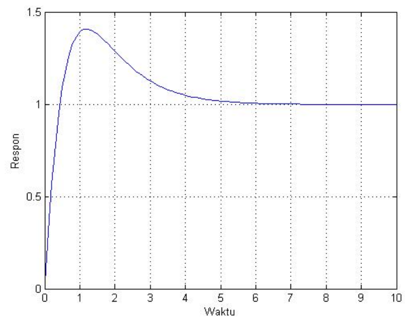
Solusi sistem (4.4) adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0.5648 \\ 0.5648 \\ 2.824 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -1.329 \\ 0 \\ -2.658 \end{pmatrix} e^{-2t} \\ + \begin{pmatrix} 0.498 \\ -0.498 \\ 0.498 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 0.2662 \\ -0.0668 \\ 0.664 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Selanjutnya, substitusikan persamaan (4.8) kedalam (4.7) yang memberikan hasil sebagai berikut.

$$y = 2.824e^{-t} - 5.316e^{-2t} + 1.494e^{-3t} + 0.998. \tag{4.10}$$

Output dari sistem (4.7) digambarkan pada kurva berikut

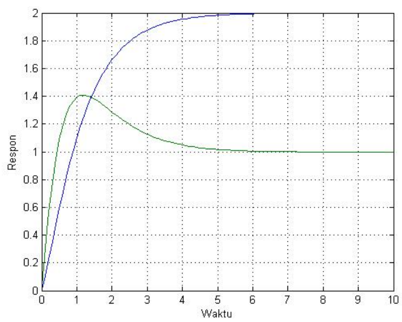


Gambar 4.2. Respon Sistem (4.7)

Dari ruang keadaan (4.7) menghasilkan *error* sebagai berikut

$$\begin{aligned} e_{ss} &= I + (CA^{-1}B) \\ &= I + \left[\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= 1 + (-1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dengan membandingkan kedua *output* yang dihasilkan dapat disimpulkan bahwa sistem yang ditambah kontrol integral tidak memiliki *error*.



Gambar 4.3. Kurva Gabungan

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Muhafzan, Bapak Narwen, M. Si, Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Zulakmal, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer, Edisi Kedelapan-Jilid* 1. Erlangga, Jakarta
[2] Boyce, W. E, Diprima, R. C. 2001. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem.* John Wiley & Sons, Inc. USA
[3] Nise, Norman S. 2011. *Control Systems Engineering, Sixth Edition* . John Wiley & Sons, Inc. USA
[4] Ogata, K. 2002. *Modern Control Engineering, Fourth Editon.* Prentice-Hall, New Jersey