

DEFISIENSI SISI-AJAIB SUPER DARI GRAF KIPAS

LIONI MASHITAH

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas Padang,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia
 oni0622@yahoo.com*

Abstrak. Misal terdapat graf $G = (V, E)$ dengan $|V| = p$ dan $|E| = q$. Suatu Graf G merupakan graf total sisi-ajaib jika terdapat pemetaan bijektif λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$, dengan sifat bahwa untuk setiap sisi pada graf tersebut jumlah label sisi dan label kedua titik ujungnya sama. Graf G dikatakan graf total ajaib super jika $f(V(G)) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$. Berkaitan dengan hal tersebut diperkenalkan konsep defisiensi sisi-ajaib (super) dari suatu graf. Konsep ini menyatakan seberapa dekat suatu graf dengan suatu graf yang mempunyai pelabelan total sisi-ajaib (super). Pada tulisan ini akan dikaji kembali tentang defisiensi sisi-ajaib super dari graf kipas.

Kata Kunci: Graf kipas, pelabelan ajaib, defisiensi sisi-ajaib super

1. Pendahuluan

Suatu graf G adalah suatu pasangan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong yang elemen-elemennya disebut titik dari G , dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) yang elemen-elemennya disebut sisi dari G .

Bagian graf yang banyak diminati oleh kalangan peneliti adalah pelabelan graf. Pelabelan graf pada suatu graf G adalah suatu pemetaan bijektif dari setiap elemen graf ke bilangan bulat positif, yang mana bilangan tersebut disebut dengan label. Elemen-elemen graf yang dipetakan dapat berupa himpunan titik, himpunan sisi, atau kombinasinya. Jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan titik, maka pelabelannya disebut pelabelan titik. jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan sisi, maka pelabelannya disebut pelabelan sisi. Jika domain dari fungsi tersebut adalah himpunan titik dan himpunan sisi, maka pelabelannya disebut pelabelan total.

Dalam pelabelan total dikenal istilah pelabelan total sisi-ajaib. Suatu pelabelan total sisi ajaib pada graf $G = (V, E)$ adalah pemetaan satu-satu λ dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian hingga untuk setiap sisi xy di G berlaku $\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$, untuk suatu bilangan bulat k positif. Pada suatu graf G , pelabelan total sisi-ajaib super adalah pelabelan total sisi-ajaib dimana label-label terkecil menjadi label titik, atau dapat dituliskan $f(V(G)) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$.

Berkaitan dengan pelabelan total sisi-ajaib super, diperkenalkan defisiensi sisi-ajaib super yang didefinisikan sebagai suatu bilangan bulat tak negatif terkecil n sedemikian sehingga $G \cup nK_1$ merupakan suatu graf total sisi-ajaib super dengan K_1 adalah graf lengkap berderajat nol, atau tak berhingga jika bilangan bulat n

tersebut tidak ada. Pada tulisan ini akan dikaji kembali tentang defisiensi sisi-ajaib super pada graf kipas.

Lema 1.1. [1] *Graf G adalah ajaib super jika dan hanya jika terdapat fungsi bijektif $f(V) = \{1, 2, 3, \dots, p\}$ sehingga himpunan $S = \{f(u) + f(v) \mid uv \in E(G)\}$ memuat q bilangan bulat berurutan. Dalam hal ini f dapat diperluas menjadi suatu pelabelan ajaib super dari G dengan konstanta ajaib $C = p + q + \min(S)$.*

2. Defisiensi Sisi-Ajaib Super dari Graf Kipas

Graf kipas F_n , $n \geq 3$ adalah graf yang diperoleh dengan cara menghapus satu sisi di lingkaran C_n yang terdapat pada graf roda W_n . Banyak titik pada graf kipas adalah $|V(F_n)| = n + 1$ dan banyak sisinya adalah $|E(F_n)| = 2n - 1$. Titik pusat dari F_n , dinotasikan c , adalah titik yang berderajat n . Sementara titik-titik lainnya dinotasikan dengan $v_1, v_2, \dots, v_n$. Dalam [3] telah ditunjukkan oleh Figueroa-Centeno dkk. bahwa graf kipas F_n merupakan graf ajaib super jika dan hanya jika $1 \leq n \leq 6$. Jadi defisiensi ajaib super dari F_n adalah 0 untuk $1 \leq n \leq 6$.

Untuk $7 \leq n \leq 11$, defisiensi ajaib supernya adalah 1. Ini berarti bahwa graf $F_n \cup K_1$ adalah graf total sisi-ajaib super. Hal tersebut dapat ditunjukkan dengan memberikan label 4 untuk titik pusat, dan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ berturut-turut diberi label sebagai berikut.

- Untuk $n = 7$ label titiknya adalah : 7, 5, 9, 6, 2, 1, 3, dengan K_1 diberi label 8.
- Untuk $n = 8$ label titiknya adalah : 5, 8, 7, 10, 6, 2, 1, 3, dengan K_1 diberi label 9.
- Untuk $n = 9$ label titiknya adalah : 5, 11, 8, 10, 7, 6, 2, 1, 3, dengan K_1 diberi label 9.
- Untuk $n = 10$ label titiknya adalah : 10, 8, 11, 9, 12, 5, 6, 2, 1, 3, dengan K_1 diberi label 7.
- Untuk $n = 11$ label titiknya adalah : 8, 11, 9, 12, 10, 13, 5, 6, 2, 1, 3, dengan K_1 diberi label 7,

Selanjutnya untuk $12 \leq n \leq 16$, diperoleh bahwa $\mu_s(F_n) = 2$, seperti yang ditunjukkan pada pelabelan terhadap $F_n \cup 2K_1$ berikut.

- untuk $n = 12$, titik pusat dan titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ berturut-turut diberi label 13, 15, 11, 14, 9, 4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5, sementara titik-titik pada $2K_1$ diberi label 10 dan 12.
- untuk $n = 13$, titik pusat dan titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ berturut-turut diberi label 15, 13, 14, 16, 10, 5, 9, 4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, sementara titik-titik pada $2K_1$ diberi label 11 dan 12.
- untuk $n = 14$, titik pusat dan titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ berturut-turut diberi label 16, 14, 15, 17, 11, 5, 10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1, 6, sementara titik-titik pada $2K_1$ diberi label 12 dan 13.
- untuk $n = 15$, titik pusat dan titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ berturut-turut diberi label 16, 15, 14, 18, 17, 11, 5, 10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1, 6, sementara titik-titik pada $2K_1$

diberi label 12 dan 13.

- untuk $n = 16$, titik pusat dan titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ berturut-turut diberi label 16, 15, 14, 18, 19, 17, 11, 5, 10, 4, 9, 3, 8, 2, 7, 1, 6, sementara titik-titik pada $2K_1$ diberi label 12 dan 13.

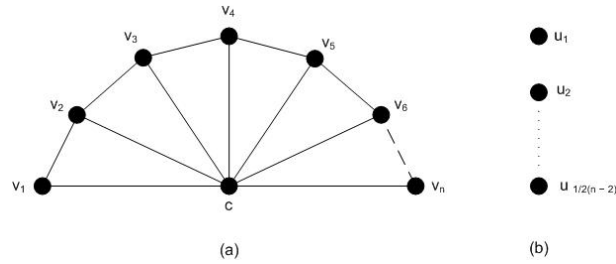
Pada teorema berikut diberikan batas atas dari defisiensi ajaib super untuk graf F_n , di mana $n \geq 17$.

Teorema 2.1. *Jika $n \geq 17$, maka defisiensi sisi-ajaib super untuk graf F_n adalah $\mu_s(F_n) \leq \lfloor \frac{1}{2}(n-2) \rfloor$.*

Bukti. Misalkan $H \cong F_n \cup \lfloor \frac{1}{2}(n-2) \rfloor K_1$ dengan

$$V(H) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i | 1 \leq i \leq \lfloor \frac{1}{2}(n-2) \rfloor\} \cup \{c\}$$

$$E(H) = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{cv_i | 1 \leq i \leq n\}.$$



Gambar 2.1. Graf $F_n \cup \lfloor \frac{1}{2}(n-2) \rfloor K_1$.

Konstruksikan pelabelan titik $g : V(H) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p\}$, dengan $p = n + 1 + \lfloor \frac{1}{2}(n-2) \rfloor$ sebagai berikut.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}i, & \text{jika } x = v_i \text{ untuk } i \text{ genap,} \\ \lfloor \frac{1}{2}(n+1+i) \rfloor, & \text{jika } x = v_i \text{ untuk } i \text{ ganjil,} \\ \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor, & x = c. \end{cases}$$

dan label pada interval $[n+1, \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor]$ digunakan sebagai label dari sebanyak $\lfloor \frac{1}{2}(n-2) \rfloor$ buah K_1 . Perhatikan bahwa

- Untuk i genap berlaku

$$\begin{aligned} g(v_i) + g(v_{i+1}) &= \frac{1}{2}i + \lfloor \frac{1}{2}(n+1+1+i) \rfloor \\ &= \frac{1}{2}i + \lfloor \frac{1}{2}(n+2+i) \rfloor \\ &= \lfloor \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}(n+2+i) \rfloor \\ &= \lfloor \frac{1}{2}(n+2+2i) \rfloor, \end{aligned}$$

- Untuk i ganjil berlaku

$$\begin{aligned} g(v_{i+1}) + g(v_i) &= \frac{1}{2}(i+1) + \lfloor \frac{1}{2}(n+1+i) \rfloor \\ &= \lfloor \frac{1}{2}(i+1) + \frac{1}{2}(n+1+i) \rfloor \\ &= \lfloor \frac{1}{2}(n+2+2i) \rfloor. \end{aligned}$$

Diperoleh himpunan jumlah label titik pada lintasan adalah sebagai berikut.

$$\{g(v_i) + g(v_{i+1}) | 1 \leq i \leq n-1\} = \{\lfloor \frac{1}{2}(n+2i+2) \rfloor | 1 \leq i \leq n\}.$$

Selanjutnya dengan menjumlahkan label titik-titik pada lintasan dengan label titik pusat, diperoleh himpunan jumlah label titik pada sisi-sisi di jari-jari.

- Untuk n genap berlaku

$$g(c) + g(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3n+i), & \text{untuk } i \text{ genap,} \\ \frac{1}{2}(4n+1+i), & \text{untuk } i \text{ ganjil,} \end{cases}$$

- Untuk n ganjil berlaku

$$g(c) + g(v_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3n-1+i), & \text{untuk } i \text{ genap,} \\ \frac{1}{2}(4n-1+i), & \text{untuk } i \text{ ganjil,} \end{cases}$$

Maka diperoleh himpunan jumlah label titik

$$\begin{aligned} S &= \{g(x) + g(y) | xy \in E(H)\} \\ &= \begin{cases} \{\frac{n}{2} + 2, \frac{n}{2} + 3, \dots, \frac{3n}{2}, \frac{3n}{2} + 1, \dots, 2n+1, \dots, \frac{5n}{2}\}, & \text{untuk } n \text{ genap,} \\ \{\frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \dots, \frac{3n-1}{2}, \frac{3n+1}{2}, \dots, 2n-1, 2n, \dots, \frac{5n-1}{2}\}, & \text{untuk } i \text{ ganjil,} \end{cases} \end{aligned}$$

Berdasarkan Lema 1.1, pelabelan g dapat diperluas menjadi suatu pelabelan ajaib super pada H dengan konstanta ajaib sebagai berikut.

- (1) Untuk n genap, banyaknya titik H adalah $p = n+1 + \lfloor \frac{1}{2}(n-2) \rfloor$, banyaknya sisi H adalah $2n-1$ dan $\min(S) = \frac{n}{2} + 2$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} k &= p + q + \min(S), \\ &= n+1 + \lfloor \frac{1}{2}(n-2) \rfloor + 2n-1 + \frac{n}{2} + 2, \\ &= 3n + \frac{1}{2}(n-1) + \frac{n}{2} + 2, \\ &= 4n+1. \end{aligned}$$

- (2) Untuk n ganjil, banyaknya titik H adalah $p = n+1 + \lfloor \frac{1}{2}(n-1-2) \rfloor$, banyaknya sisi H adalah $2n-1$ dan $\min(S) = \frac{n+3}{2}$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} k &= p + q + \min(S), \\ &= n+1 + \lfloor \frac{1}{2}(n-1-2) \rfloor + 2n-1 + \frac{n+3}{2}, \\ &= 3n + \frac{1}{2}(n-3) + \frac{n+3}{2}, \\ &= 4n. \end{aligned}$$

Selanjutnya, pada pelabelan graf total sisi ajaib super berlaku

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k,$$

sehingga label pada sisi-sisinya adalah

$$\lambda(xy) = k - (\lambda(x) + \lambda(y)),$$

dengan $x, y \in V(F_n \cup \lfloor \frac{1}{2}(n-2) \rfloor K_1)$ dan $xy \in E(F_n \cup \lfloor \frac{1}{2}(n-2) \rfloor K_1)$. Jadi $\mu_s(F_n) \leq \lfloor \frac{1}{2}(n-2) \rfloor$. $\square$

3. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan diatas dapat disimpulkan bahwa untuk defisiensi sisi-ajaib super pada suatu graf kipas (F_n) adalah sebagai berikut.

$$\mu_s(F_n) = \begin{cases} 0, & \text{, untuk } 1 \leq n \leq 6, \\ 1, & \text{, untuk } 7 \leq n \leq 11 \\ 2, & \text{, untuk } 12 \leq n \leq 16, \\ \lfloor \frac{1}{2}(n-2) \rfloor, & \text{untuk } n \text{ lain.} \end{cases}$$

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Narwen, M.Si, Bapak Dr. Dodi Devianto, dan Ibu Hazmira Yozza, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Miller, Mirka. 2000. Open Problem in Graph Theory : Labeling and Extremal Gpaph. *Prosiding Konferensi Nasional Himpunan Matematika Indonesia ke X*. Institut Teknologi Bandung, 17 – 20 Juli.
- [2] Ngurah, A.A.G. 2007. Ketotalan Sisi-Ajaib Graf dan Defisiensinya. *Disertasi S3*, tidak diterbitkan.
- [3] R.M. Figueuroa-Centano, R. Ichishima and F.A. Muntaner-Batle, The place of super edge-magic labelling among other classes of labelings. *Discrete Math.* **231** (2001) : 153 – 168.
- [4] R.M. Figueuroa-Centano, R. Ichishima and F.A. Muntaner-Batle, On the super edge-magic deficiency of graphs, *Electron. Notes Discrete Math* **11** (2002) : 299 – 314.
- [5] R.M. Figueuroa-Centano, R. Ichishima and F.A. Muntaner-Batle, Some new results on the super edge-magic deficiency of graphs, *J. Combin Math Combin Comput.* **55** (2005) : 17 – 31.
- [6] R.M. Figueuroa-Centano, R. Ichishima and F.A. Muntaner-Batle, On super edge-magic graphs, *Ars Combin.* **64** (2002) : 81 – 95.