

BILANGAN TERHUBUNG PELANGI PADA GRAF HASIL OPERASI KORONA GRAF ANTIPRISMA (AP_m) DAN GRAF LENGKAP (K_4)

KHAIRUN NISA HUMOLUNGO, SUMARNO ISMAIL, ISRAN K. HASAN*,
NISKY IMANSYAH YAHYA

Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Negeri Gorontalo
email: nisahumolungo@gmail.com, sumarnoismail@ung.ac.id, isran.hasan@ung.ac.id,
nisky@ung.ac.id

Diterima 13 Desember 2021 Direvisi 5 April 2022 Dipublikasikan 30 April 2022

Abstrak. Bilangan terhubung pelangi didefinisikan sebagai banyaknya warna minimum yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi terhubung pelangi, dengan syarat sisi yang termasuk dalam lintasan pelangi tidak boleh memiliki warna yang sama. Bilangan terhubung pelangi disimbolkan dengan $rc(G)$. Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan dan penelitian, maka bilangan terhubung pelangi mulai diterapkan ke dalam operasi graf. Penelitian ini menggunakan operasi korona untuk mengetahui bilangan terhubung pelangi dari graf antiprisma (AP_m) dan graf lengkap (K_4). Berdasarkan hasil penelitian, maka diperoleh teorema bilangan terhubung pelangi dari graf $(AP_m \odot K_4) = 2m$ untuk $3 \leq m \leq 7$ dan bilangan terhubung pelangi dari graf $(K_4 \odot AP_m) = 4$ untuk $m = \{3, 4\} \wedge 2m - 2$ untuk $5 \leq m \leq 9, m$ ganjil $\wedge 2m$ untuk $5 \leq m \leq 9, m$ genap.

Kata Kunci: Bilangan Terhubung Pelangi, Graf Antiprisma dan Graf Lengkap, Operasi Korona

1. Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari banyak masalah yang memerlukan solusi. Matematika merupakan salah satu bidang ilmu yang bisa menyelesaikan atau memecahkan permasalahan dalam kehidupan nyata [9]. Salah satu ilmu matematika yang banyak digunakan sebagai alat bantu untuk menggambarkan suatu permasalahan agar lebih mudah dipahami dan diselesaikan adalah teori graf. Pada tahun 1736, seorang matematikawan berasal dari Swiss bernama Leonhard Euler memperkenalkan teori graf dalam tulisannya, yang berisi tentang pemecahan masalah Jembatan Konisberg. Leonhard Euler menyelesaikan permasalahan tersebut dengan memodelkan ke dalam bentuk graf [1].

Topik yang sedang banyak dikembangkan pada teori graf adalah masalah tentang pewarnaan graf. Pewarnaan graf terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu

*penulis korespondensi

pewarnaan sisi, pewarnaan titik dan pewarnaan wilayah [11]. Pada penelitian ini, peneliti tertarik untuk membahas masalah tentang pewarnaan sisi. Karena pewarnaan sisi ini banyak diterapkan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya pada masalah penjadwalan dengan memberi jumlah minimum warna [1]. Salah satu konsep dari pewarnaan sisi adalah bilangan terhubung pelangi, yang disimbolkan dengan $rc(G)$. Bilangan terhubung pelangi didefinisikan sebagai banyaknya warna minimum yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi terhubung pelangi, dengan syarat sisi yang termasuk dalam lintasan pelangi tidak boleh memiliki warna yang sama [4].

Seiring berkembangnya ilmu pengetahuan dan penelitian, maka bilangan terhubung pelangi mulai diterapkan ke dalam operasi graf. Operasi graf merupakan salah satu cara untuk memperoleh graf. Adapun jenis operasi yang digunakan pada penelitian ini adalah operasi korona [8]. Operasi korona adalah operasi yang dilakukan dengan cara mengambil satu salinan misalnya graf G , kemudian ditempelkan pada graf yang berbeda atau misalnya graf H , dengan syarat graf G tersebut ditempelkan pada masing-masing titik yang berada di graf H , dan setiap titik di graf G yang berhadapan langsung dengan graf H dihubungkan oleh sebuah lintasan.

Selanjutnya, berdasarkan hasil pencarian literatur yang ada, berikut ini beberapa topik penelitian terdahulu yang telah dikaji dan dikembangkan dalam bilangan terhubung pelangi. Hader [7] mengkaji topik tentang bilangan terhubung pelangi pada graf korona kipas dan roda dengan graf trivial, Chartrand et al. [4] telah mengkaji topik tentang *rainbow connection* pada graf, Dafik dan Darmawan [5] telah mengkaji topik tentang bilangan terhubung pelangi (*rainbow connection number*) dari graf prisma dan perkalian dua graf. Pada penelitian ini, peneliti tertarik untuk mengkaji bilangan terhubung pelangi dengan menggunakan operasi korona pada graf antiprisma (AP_m) dan graf lengkap (K_4). Tujuan penelitian ini adalah untuk mencari bilangan terhubung pelangi dari graf antiprisma (AP_m) dan graf lengkap (K_4) dengan menggunakan operasi korona. Sehingga akan diperoleh dua teorema yaitu, bilangan terhubung pelangi pada graf hasil operasi korona graf antiprisma dan graf lengkap ($AP_m \odot K_4$), kemudian bilangan terhubung pelangi pada graf hasil operasi korona graf lengkap dan graf antiprisma ($K_4 \odot AP_m$). Sehingga artikel ini diharapkan dapat menambah wawasan dalam bidang teori graf mengenai pewarnaan graf, khususnya bilangan terhubung pelangi.

2. Landasan Teori

2.1. Graf Lengkap, Graf Antiprisma dan Operasi Corona

Graf lengkap (*Complete graph*) adalah graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga dengan titik lainnya. Graf lengkap dengan m titik disimbolkan dengan K_m . Setiap titik pada K_m berderajat $m - 1$, sehingga banyaknya sisi pada graf lengkap yang terdiri dari m buah titik adalah $\frac{m(m-1)}{2}$ sisi [4].

Graf antiprisma (*AntiPrism graph*) adalah sebuah graf yang terbentuk dari gabungan 2 buah graf, yaitu graf sikel luar dan graf sikel dalam yang berorde m titik, dimana setiap titik yang berhadapan saling terhubung langsung. Graf antiprisma

dengan m buah titik dilambangkan dengan AP_m . Graf antiprisma mempunyai titik sebanyak $2m$ dan sisi sebanyak $4m$, dimana $m \geq 3$ [6].

Graf hasil operasi korona dari dua graf G dan H didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil sebuah duplikat dari graf G dan $|V(G)|$ duplikat $H_1, H_2, H_3, \dots, H_{|V(G)|}$ dari H , selanjutnya dengan menghubungkan titik ke- i dari G ke setiap titik di H_i dimana $i = 1, 2, 3, \dots, |V(G)|$. Operasi korona disimbolkan dengan $G \odot H$ [10].

2.2. Bilangan Terhubung Pelangi

Pewarnaan sisi pada graf G disebut pelangi sisi terhubung (*rainbow edge connection*) jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh sebuah lintasan yang memiliki warna berbeda pada setiap sisi. Bilangan terhubung pelangi (*rainbow connection number*) pada graf G didefinisikan sebagai minimum warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi pelangi sisi terhubung. Bilangan terhubung pelangi dari graf G disimbolkan dengan $rc(G)$ [4].

Teorema 2.1. [4] *Jika G adalah graf terhubung tak trivial dengan ukuran m dan $diam(G) = \max\{d(u, v) | u, v \in V(G)\}$, maka*

$$diam(G) \leq rc(G) \leq m.$$

3. Bilangan Terhubung Pelangi Untuk Graf Hasil Operasi Korona Graf Antiprisma dan Graf Lengkap $AP_m \odot K_4$

Misalkan m adalah bilangan bulat positif. Graf AP_m merupakan graf antiprisma dengan ukuran m titik, dimana $m \geq 3$. Sedangkan graf K_4 merupakan graf lengkap dengan 4 titik. Maka operasi korona untuk graf antiprisma dan graf lengkap, dinotasikan dengan $(AP_m \odot K_4)$, untuk $3 \leq m \leq 7$. Selanjutnya tuliskan $G = AP_m \odot K_4$, maka himpunan titik dan himpunan sisi G adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V(G) &= \{u_i, v_i | i \in [1, m]\} \cup \{u_{i,j}, v_{i,j} | i \in [1, m], j \in [1, 4]\}, \\ E(G) &= \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1} | i \in [1, m-1]\} \cup \{u_i v_i | i \in [1, m]\} \cup \{u_i v_{i+1} | i \in [1, m-1]\} \\ &\quad \cup \{u_m u_1, v_m v_1, u_m v_1\} \cup \{u_i u_{i,j}, v_i v_{i,j} | i \in [1, m], j \in [1, 4]\} \\ &\quad \cup \{u_{i,j} u_{i,j+1}, v_{i,j} v_{i,j+1} | i \in [1, m], j \in [1, 3]\} \cup \{u_{i,1} u_{i,4}, v_{i,1} v_{i,4} | i \in [1, m]\}, \\ &\quad \cup \{u_{i,j} u_{i,j+2}, v_{i,j} v_{i,j+2} | i \in [1, m], j \in [1, 2]\}. \end{aligned}$$

Berikut diberikan bilangan terhubung pelangi untuk graf $AP_m \odot K_4$.

Teorema 3.1. *Misalkan m adalah bilangan bulat positif. Graf AP_m adalah graf antiprisma dengan ukuran m titik, dimana $3 \leq m \leq 7$ dan K_4 adalah graf lengkap dengan 4 titik. Jika $G \cong (AP_m \odot K_4)$, maka :*

$$\begin{aligned} diam(G) &= \begin{cases} m+1, & \text{untuk } m=3, \\ m, & \text{untuk } m=4 \text{ dan } m=5, \\ m-1, & \text{untuk } m=6 \text{ dan } m=7. \end{cases} \\ rc(G) &= 2m. \end{aligned}$$

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.1, diketahui $rc(G) \geq diam(G)$. Sehingga untuk membuktikan Teorema 3.1, cukup dengan memperlihatkan bahwa $rc(G) \geq diam(G)$. Apabila $rc(G) \neq diam(G)$ atau $rc(G) > diam(G)$, maka akan dibuktikan secara kontradiksi.

Kasus 1. $diam(G) = m + 1$ untuk $m = 3$.

Diketahui $diam(G) = 4$ untuk $m = 3$, maka $rc(G) \geq 4$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $rc(G) \geq 2m$. Diasumsikan $rc(G) \leq 2m - 1$, maka terdapat pewarnaan $2m - 1$ pelangi pada graf G dengan definisi warna $c' : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2m - 1\}$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $m = 3$, maka terdapat $2m$ graf lengkap (K_4). Masing-masing graf lengkap (K_4) tersebut harus memiliki satu warna berbeda. Maka graf G tidak memuat pewarnaan $2m - 1$ pelangi, hal ini bertentangan dengan asumsi $rc(G) \leq 2m - 1$. Oleh karena itu, diperoleh $rc(G) \geq 2m$ untuk $m = 3$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $rc(G) \leq 2m$ untuk $m = 3$, dengan definisi warna $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, 2m\}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c(v_i v_{i,j}) &= k, i \in [1, m], j \in [1, 4], k \in [1, 2m], k \text{ ganjil}, \\ c(u_i u_{i,j}) &= k, i \in [1, m], j \in [1, 4], k \in [1, 2m], k \text{ genap}, \\ c(u_i u_{i+1}) &= c(u_1 u_m) = 1, i \in [1, m - 1], \\ c(v_i v_{i+1}) &= c(v_1 v_m) = 6, i \in [1, m - 1], \\ c(v_i u_i) &= c(v_i u_m) = 3i \pmod{2m - 2}, i = 1, \\ c(v_i u_i) &= c(v_i u_{i-1}) = \begin{cases} 3i - 1, & i = m - 1, \\ \lceil \frac{2i}{3} \rceil, & i = m, \end{cases} \\ c(v_{i,j} v_{i,j+1}) &= k, i, j \in [1, m], k \in [1, 2m], k \text{ ganjil}, \\ c(u_{i,j} u_{i,j+1}) &= k, i, j \in [1, m], k \in [1, 2m], k \text{ genap}, \\ c(v_{i,1} v_{i,4}) &= c(v_{i,1} v_{i,3}) = c(v_{i,2} v_{i,4}) = k, i \in [1, m], k \in [1, 2m], k \text{ ganjil}, \\ c(u_{i,1} u_{i,4}) &= c(u_{i,1} u_{i,3}) = c(u_{i,2} u_{i,4}) = k, i \in [1, m], k \in [1, 2m], k \text{ genap}. \end{aligned}$$

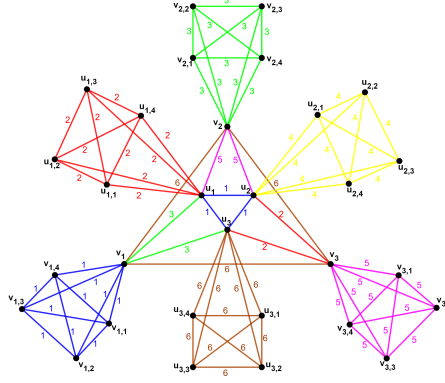
Pewarnaan pelangi pada graf G dapat dilihat pada Gambar 1.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa untuk setiap dua titik x dan y dengan $d(x, y) \geq 2$, terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c , sedangkan untuk setiap dua titik pada graf (G) yang saling bertetangga jelas terdapat lintasan pelangi. Lintasan pelangi pada setiap pasang titik di $x, y \in V(G)$ dapat dilihat pada Tabel 1.

Pembuktian Kasus 2 $diam(G) = m$ untuk $m = 4$ dan $m = 5$, serta Kasus 3 $diam(G) = m - 1$ untuk $m = 6$ dan $m = 7$ dilakukan dengan cara yang sama. $\square$

4. Bilangan Terhubung Pelangi untuk Graf Hasil Operasi Korona Graf Lengkap dan Graf Antiprisma ($K_4 \odot AP_m$)

Graf K_4 merupakan graf lengkap dengan 4 titik. Sedangkan graf AP_m merupakan graf antiprisma dengan ukuran m titik, dimana $m \geq 3$. Maka operasi korona untuk graf lengkap dan graf antiprisma dinotasikan dengan $(K_4 \odot AP_m)$. Selanjutnya dimisalkan $G = K_4 \odot AP_m$, maka himpunan titik dan himpunan sisi G adalah

Gambar 1. Pewarnaan pelangi graf $(AP_3 \odot K_4)$ Tabel 1. Lintasan Pelangi $(AP_3 \odot K_4)$

Kasus	x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1	v_i	u_k	$i \in [1, m], k \in [2, m+1]$	v_i, u_i, u_k
2	$v_{i,j}$	v_k	$i \in [1, m], j \in [1, 4], k \in [2, m+1]$ $i, k = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}, j \in [1, 4]$	$v_{i,j}, v_i, v_k$ $v_{i,j}, v_i, v_k$
3	$v_{i,j}$	u_k	$i, k \in [1, m], j \in [1, 4]$ $i, k = \{(2, 1), (3, 2), (1, 3)\}, j \in [1, 4]$	$v_{i,j}, v_i, u_k$ $v_{i,j}, v_i, u_k$
4	$u_{i,j}$	v_k	$i, k \in [1, m], j \in [1, 4]$ $i \in [1, m], j \in [1, 4], k \in [2, m+1]$	$u_{i,j}, u_i, v_k$ $u_{i,j}, u_i, v_k$
5	$u_{i,j}$	u_k	$i \in [1, m], j \in [1, 4], k \in [2, m+1]$ $i, k = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}, j \in [1, 4]$	$u_{i,j}, u_i, u_k$ $u_{i,j}, u_i, u_k$
6	$v_{i,j}$	$v_{k,j}$	$i \in [1, m], j \in [1, 4], k \in [2, m+1]$	$v_{i,j}, v_i, v_k, v_{k,j}$
7	$u_{i,j}$	$u_{k,j}$	$i \in [1, m], j \in [1, 4], k \in [2, m+1]$	$u_{i,j}, u_i, u_k, u_{k,j}$
8	$v_{i,j}$	$u_{k,j}$	$i, k \in [1, m], j \in [1, 4]$ $i, k = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}, j \in [1, 4]$	$v_{i,j}, v_i, u_k, u_{k,j}$ $v_{i,j}, v_i, u_k, u_{k,j}$
9	$v_{i,j}$	u_l	$i \in [1, m], j \in [1, 4], l \in [2, m+1]$	$v_{i,j}, v_i, v_l, u_l$
10	$u_{i,j}$	v_l	$i, l = \{(2, 1), (3, 2)\}, j \in [1, 4]$ $i = 1, j \in [1, 4], l = m$	$u_{i,j}, u_i, u_l, v_l$ $u_{i,j}, u_i, v_{l-1}, v_l$
11	$v_{i,j}$	$v_{l,j}$	$i \in [1, m], j \in [1, 4], l = \{2, 1\} i \text{ ganjil}$ $i = 2, j \in [1, 4], l = m$	$v_{i,j}, v_i, v_l, u_l, v_{l,j}$ $v_{i,j}, v_i, u_l, u_l, v_{l,j}$

sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 V(G) &= \{u_i | i \in [1, 4]\} \cup \{v_{i,j}, w_{i,j} | i \in [1, 4], j \in [1, m]\}, \\
 E(G) &= \{u_i u_{i+1} | i \in [1, 3]\} \cup \{u_4 u_1\} \cup \{u_i u_{i+2} | i \in [1, 2]\}, \\
 &\cup \{u_i v_{i,j}, u_i w_{i,j} | i \in [1, 4], j \in [1, m]\}, \\
 &\cup \{v_{i,j} v_{i,j+1}, w_{i,j} w_{i,j+1} | i \in [1, 4], j \in [1, m-1]\}, \\
 &\cup \{v_{i,j} w_{i,j} | i \in [1, 4], j \in [1, m]\} \cup \{v_{i,j+1} w_{i,j} | i \in [1, 4], j \in [1, m-1]\}, \\
 &\cup \{v_{i,m} v_{i,1}, w_{i,m} w_{i,1}, w_{i,m} v_{i,1} | i \in [1, 4]\}.
 \end{aligned}$$

Teorema 4.1. Misalkan K_4 adalah graf lengkap dengan 4 titik dan AP_m adalah graf antiprisma dengan ukuran m titik, dimana $3 \leq m \leq 9$. Jika $G \cong (K_4 \odot AP_m)$, maka:

$$\begin{aligned} \text{diam}(G) &= 3, \text{ untuk } 3 \leq m \leq 9, \text{ dan} \\ rc(G) &= \begin{cases} 4, & \text{untuk } m = 3 \text{ dan } m = 4, \\ 2m - 2, & \text{untuk } 5 \leq m \leq 9, \text{ dan } m \text{ ganjil}, \\ 2m, & \text{untuk } 5 \leq m \leq 9, \text{ dan } m \text{ genap}. \end{cases} \end{aligned}$$

Bukti. Kasus 1. Jika $m = 3$ dan $m = 4$.

Pada kasus ini, untuk $m = 3$ dan $m = 4$ dibahas secara bersamaan, karena definisi pewarnaannya sama. Diketahui $\text{diam}(G)$ untuk $m = 3$ dan $m = 4$ adalah 3, maka $rc(G) \geq 3$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $rc(G) \geq 4$ untuk $m = 3$ dan $m = 4$. Diasumsikan $rc(G) \leq \text{diam}(G) = 3$, maka terdapat pewarnaan-3 pelangi yang didefinisikan dengan $c' : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ pada graf G untuk $m = 3$ dan $m = 4$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan :

$$c'(u_i v_{i,j}) = c'(u_i w_{i,j}) = i \mod 2m, \quad i \in [1, 4], j \in [1, m].$$

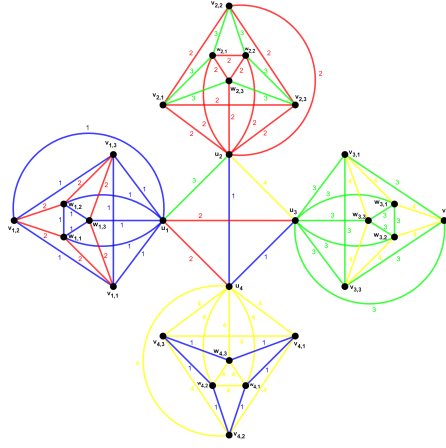
Perhatikan sisi $u_i v_{i,j}$ dan $u_i w_{i,j}$ untuk $i = 4 \wedge j \in [1, m]$ tidak dapat diberi warna 1. Andaikan diberi warna 1, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan $v_{i,j}, u_i, u_{i-3}, v_{i-3,j}$ dan $w_{i,j}, u_i, u_{i-3}, w_{i-3,j}$ untuk $i = 4 \wedge j \in [1, m]$. Sehingga dimisalkan warna 1 hanya untuk mewarnai sisi $u_i v_{i,j}$ dan $u_i w_{i,j}$ untuk $i = 1 \wedge j \in [1, m]$. Selanjutnya sisi $u_i v_{i,j}$ dan $u_i w_{i,j}$ untuk $i = 4 \wedge j \in [1, m]$ tidak dapat diberi warna 2. Andaikan diberi warna 2, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan $v_{i,j}, u_i, u_{i-2}, v_{i-2,j}$ dan $w_{i,j}, u_i, u_{i-2}, w_{i-2,j}$ untuk $i = 4 \wedge j \in [1, m]$. Sehingga dimisalkan warna 2 hanya untuk mewarnai sisi $u_i v_{i,j}$ dan $u_i w_{i,j}$ untuk $i = 2 \wedge j \in [1, m]$. Selanjutnya sisi $u_i v_{i,j}$ dan $u_i w_{i,j}$ untuk $i = 4 \wedge j \in [1, m]$ tidak dapat diberi warna 3. Andaikan diberi warna 3, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi yaitu lintasan $v_{i,j}, u_i, u_{i-1}, v_{i-1,j}$ dan $w_{i,j}, u_i, u_{i-1}, w_{i-1,j}$ untuk $i = 4 \wedge j \in [1, m]$. Sehingga dimisalkan warna 3 hanya untuk mewarnai sisi $u_i v_{i,j}$ dan $u_i w_{i,j}$ untuk $i = 3 \wedge j \in [1, m]$. Karena pada graf G untuk $m = 3$ dan $m = 4$ tidak terdapat pewarnaan-3 pelangi, maka hal ini bertentangan dengan asumsi $rc(G) \leq \text{diam} = 3$. Oleh karena itu, diperoleh $rc(G) \geq 4$ untuk $m = 3$ dan $m = 4$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $rc(G) \leq 4$ untuk $m = 3$ dan $m = 4$ dengan definisi warna $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c(u_i v_{i,j}) &= c(u_i w_{i,j}) = i \mod (2m - 1), \quad i \in [1, 4], j \in [1, m], \\ c(v_{i,j} v_{i,j+1}) &= c(w_{i,j} w_{i,j+1}) = i \mod (2m - 1), \quad i \in [1, 4], j \in [1, m], m + 1 = 1, \\ c(v_{i,j} w_{i,j}) &= c(w_{i,j} v_{i,j+1}) = (i + 1) \mod 2m, \quad i \in [1, m + 1], j \in [1, m], m + 1 = 1, \\ c(u_i u_{i+1}) &= i + 2, \quad i = \{1, 2\}, \\ c(u_i u_4) &= 1, \quad i = \{2, 3\}, \\ c(u_i u_1) &= 2, \quad i = \{3, 4\}. \end{aligned}$$

Pewarnaan pelangi pada graf G dapat dilihat pada Gambar 2.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa untuk setiap x dan y dengan $d(x, y) \geq 2$ terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c , sedangkan untuk setiap dua titik

Gambar 2. Pewarnaan pelangi graf $(K_4 \odot AP_3)$

pada graf G yang saling bertetangga jelas terdapat lintasan pelangi. Lintasan pelangi untuk setiap dua titik $x, y \in V(G)$ dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2. Lintasan Pelangi $(K_4 \odot AP_3)$

Kasus	x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1	u_i	$v_{j,k}$	$i = 1, j \in [2, 4], k \in [1, m]$ $i = 2, j = \{1, 3, 4\}, k \in [1, m]$ $i = 3, j = \{1, 2, 4\}, k \in [1, m]$ $i = 4, j \in [1, 3], k \in [1, m]$	$u_i, u_j, v_{j,k}$ $u_i, u_j, v_{j,k}$ $u_i, u_j, v_{j,k}$ $u_i, u_j, v_{j,k}$
2	u_i	$w_{j,k}$	$i = 1, j \in [2, 4], k \in [1, m]$ $i = 2, j = \{1, 3, 4\}, k \in [1, m]$ $i = 3, j = \{1, 2, 4\}, k \in [1, m]$ $i = 4, j \in [1, 3], k \in [1, m]$	$u_i, u_j, w_{j,k}$ $u_i, u_j, w_{j,k}$ $u_i, u_j, w_{j,k}$ $u_i, u_j, w_{j,k}$
3	$v_{i,j}$	$v_{i,k}$	$i \in [1, 4], j, k = \{(1, 3), (2, 4)\}$	$v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i,k}$
4	$w_{i,j}$	$w_{i,k}$	$i \in [1, 4], j, k = \{(1, 3), (2, 4)\}$	$w_{i,j}, w_{i,j+1}, w_{i,k}$
5	$v_{i,j}$	$w_{i,k}$	$i \in [1, 4], j, k = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1)\}$ $i, j \in [1, 4], k = \{4, 1, 2, 3\}$ $i \in [1, 4], j = 4, k = 2$	$v_{i,j}, w_{i,j+1}, w_{i,k}$ $v_{i,j}, w_{i,j}, w_{i,k}$ $v_{i,j}, w_{i,k-1}, w_{i,k}$
6	$v_{i,k}$	$v_{j,k}$	$i \in [1, 3], j \in [2, 4], k \in [1, m]$ $i = \{3, 4\}, j = 1, k \in [1, m]$ $i = 2, j = 4, k \in [1, m]$	$v_{i,k}, u_i, u_j, v_{j,k}$ $v_{i,k}, u_i, u_j, v_{j,k}$ $v_{i,k}, u_i, u_j, v_{j,k}$
7	$w_{i,k}$	$w_{j,k}$	$i \in [1, 3], j \in [2, 4], k \in [1, m]$ $i = \{3, 4\}, j = 1, k \in [1, m]$ $i = 2, j = 4, k \in [1, m]$	$w_{i,k}, u_i, u_j, w_{j,k}$ $w_{i,k}, u_i, u_j, w_{j,k}$ $w_{i,k}, u_i, u_j, w_{j,k}$
8	$v_{i,j}$	$w_{k,j}$	$i \in [1, 3], j \in [1, 4], k \in [2, 4]$ $i, k = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}, j \in [1, 4]$ $i, k = \{(1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}, j \in [1, 4]$	$v_{i,j}, u_i, u_j, w_{k,j}$ $v_{i,j}, u_i, u_j, w_{k,j}$ $v_{i,j}, u_i, u_j, w_{k,j}$

Kasus 2. $m = 5$.

Untuk $m = 5$, karena $\text{diam}(G) = 3$, maka $\text{rc}(G) \geq 3$. Selanjutnya, akan ditun-

jukkan $rc(G) \geq 2m - 2 = 8$. Diasumsikan $rc(G) \leq 2m - 3 = 7$, maka terdapat pewarnaan-7 pelangi dengan definisi warna $c' : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 7\}$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $m = 5$, maka terdapat empat graf AP_5 yang menempel pada setiap titik di graf K_4 . Perhatikan bahwa pada masing-masing graf AP_5 , sisi $u_i v_{i,j}$ dan sisi $u_i w_{i,j}$ untuk $i \in [1, 4] \wedge j \in [1, m]$ tidak dapat diberi warna yang sama. Andaikan sisi $u_i v_{i,j}$ dan sisi $u_i w_{i,j}$ untuk $i \in [1, 4] \wedge j \in [1, m]$ diberi warna yang sama, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi, salah satunya adalah lintasan $v_{i,j}, u_i, w_{i,j+2}$ untuk $i \in [1, 4], j \in [1, m] | m+1 = 1$ dan $m+2 = 2$. Sehingga sisi $u_i v_{i,j}$ dan sisi $u_i w_{i,j}$ untuk $i \in [1, 4] \wedge j \in [1, m]$ haruslah diberi dua warna berbeda pada masing-masing graf AP_5 . Akibatnya warna yang diperlukan untuk mewarnai 4 graf AP_5 adalah sebanyak $2m - 2 = 8$. Ini bertentangan dengan asumsi $rc(G) \leq 2m - 3 = 7$. Oleh karena itu, diperoleh $rc(G) \geq 2m - 2 = 8$ untuk $m = 5$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $rc(G) \leq 2m - 2 = 8$ dengan definisi warna $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ sebagai berikut :

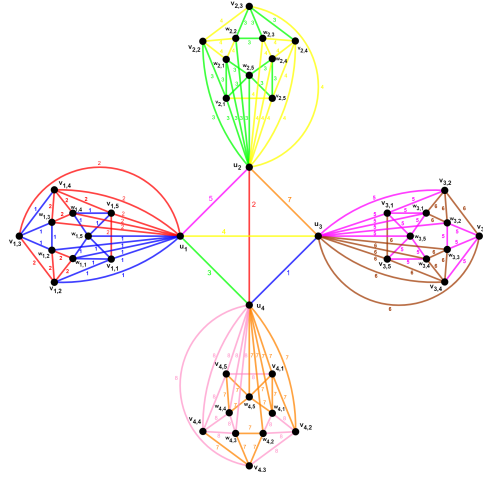
$$\begin{aligned}
 c(u_i v_{i,j}) &= \begin{cases} k & \text{mod } 2m - 2, i \in [1, 4], j = \{1, 2\}, k \in [1, 2m - 2], k \text{ ganjil,} \\ k & \text{mod } 2m, \quad i \in [1, 4], j \in [3, m], k \in [1, 2m - 2], k \text{ genap.} \end{cases} \\
 c(u_i w_{i,j}) &= \begin{cases} k & \text{mod } 2m - 2, i \in [1, 4], j = \{1, 2, 5\}, k \in [1, 2m - 2], k \text{ ganjil,} \\ k & \text{mod } 2m - 1, i \in [1, 4], j = \{3, 4\}, k \in [1, 2m - 2], k \text{ genap.} \end{cases} \\
 c(v_{i,j} v_{i,j+1}) &= \begin{cases} k & \text{mod } 2m - 2, i \in [1, 4], j = \{1, 3\}, k \in [1, 2m - 2], k \text{ ganjil,} \\ k & \text{mod } 2m - 1, i \in [1, 4], j = \{3, 4\}, k \in [1, 2m - 2], k \text{ genap.} \end{cases} \\
 c(w_{i,j} w_{i,j+1}) = c(w_{i,j} v_{i,j+1}) &= \begin{cases} k, & i \in [1, 4], j = \{2, 4, 5\}, \\ & k \in [1, 2m - 2], k \text{ ganjil, } m + 1 = 1, \\ k & \text{mod } 2m \quad i \in [1, 4], j = \{1, 3\}, \\ & k \in [1, 2m - 2], k \text{ genap.} \end{cases} \\
 c(u_i u_{i+1}) &= j, i = \{1, 2\}, j = \{m, m + 2\}, \\
 c(u_i u_{i+1}) &= \begin{cases} m - 1, & i = 1, \\ i & \text{mod } m, i = 2, \end{cases} \\
 c(u_i u_4) &= \begin{cases} i + 2, i = 1, \\ i - 2, i = 3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Pewarnaan pelangi pada graf G untuk $m = 5$ dapat dilihat pada Gambar 3.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa untuk setiap x dan y di titik u, v dan w dengan $d(u, v, w) \geq 2$ terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c , sedangkan untuk setiap dua titik pada graf G yang saling bertetangga jelas terdapat lintasan pelangi. Lintasan pelangi pada setiap pada titik di $x, y \in V(G)$ dapat dilihat pada Tabel 3.

Kasus 3. $m = 6$.

Untuk $m = 6$, graf G memiliki $diam(G) = 3$, maka $rc(G) \geq 3$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $rc(G) \geq 2m = 12$. Diasumsikan $rc(G) \leq 2m - 1 = 11$, maka terdapat pewarnaan-11 pelangi dengan definisi warna $c' : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 11\}$. Karena $m = 6$, maka terdapat 4 buah graf AP_6 yang menempel pada setiap titik di graf K_4 . Perhatikan masing-masing graf AP_6 , sisi $u_i v_{i,j}$ dan sisi $u_i w_{i,j}$ untuk $i \in [1, 4] \wedge j \in [1, m]$ tidak dapat diberi warna yang sama. Andaikan diberi warna

Gambar 3. Pewarnaan pelangi graf $(K_4 \odot AP_5)$

yang sama pada sisi $u_i v_{i,j}$ dan sisi $u_i w_{i,j}$ untuk $i \in [1, 4] \wedge j \in [1, m]$, maka akan terdapat lintasan yang tidak pelangi. Salah satunya adalah lintasan $v_{i,j}, u_i, w_{i,j+3}$ untuk $i \in [1, 4], j \in [1, m] | m+1 = 1, m+2 = 2 \wedge m+3 = 3$. Sehingga sisi $u_i v_{i,j}$ dan sisi $u_i w_{i,j}$ untuk $i \in [1, 4] \wedge j \in [1, m]$ haruslah diberi 3 warna berbeda pada masing-masing graf AP_6 . Akibatnya warna yang diperlukan untuk mewarnai 4 buah graf AP_6 adalah sebanyak $2m = 12$, maka hal ini bertentangan dengan asumsi $rc(G) \leq 2m - 1 = 11$. Oleh karena itu, diperoleh $rc(G) \geq 2m = 12$ untuk $m = 6$.

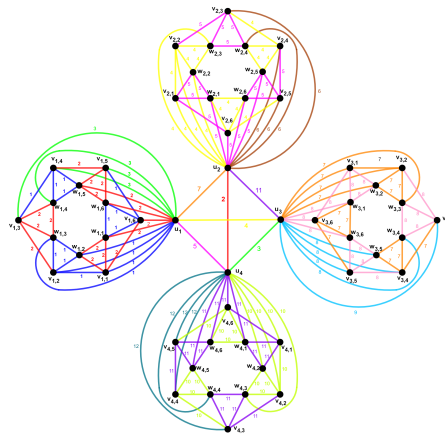
Selanjutnya, akan ditunjukkan $rc(G) \leq 2m = 12$ dengan definisi warna $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 c(u_i v_{i,j}) &= k, & i \in [1, 4], j = \{1, 2\}, k &= \{1, 4, 7, 10\} \wedge \\
 & & j \in [3, m], k &= \{3, 6, 9, 12\} \wedge j = m, \\
 & & k &= \{2, 5, 8, 11\}, \\
 c(u_i w_{i,j}) &= k \pmod{2m}, & i \in [1, 4], j = \{2, 3\}, k &= \{1, 4, 7, 10\} \wedge \\
 & & j = \{1, 5, 6\}, k &= \{2, 5, 8, 11\} \wedge j = 4, \\
 & & k &= \{3, 6, 9, 12\}, \\
 c(v_{i,j} v_{i,j+1}) &= k \pmod{2m-1}, & i \in [1, 4], j \in [3, m], k &= \{1, 4, 7, 10\} \wedge \\
 & & j \in [2, m], k &= \{2, 5, 8, 11\}, m+1 = 1, \\
 c(w_{i,j} w_{i,j+1}) &= c(w_{i,j} v_{i,j+1}) = k, & i \in [1, 4], j = \{1, 3, 5\}, k &= \{2, 5, 8, 11\} \wedge \\
 & & j = \{2, 4, 6\}, k &= \{1, 4, 7, 10\}, m+1 = 1, \\
 c(v_{i,j} w_{i,j}) &= k \pmod{2m+2}, & i \in [1, 4], j = \{1, 3, 5, 7, 9\}, k &= \{1, 5, 9, 12\} \wedge \\
 & & j = \{2, 4, 6, 8\}, k &= \{2, 6, 10, 14\}, \\
 c(u_i u_{i+1}) &= j, & i &= \{1, 2\}, j = \{11, 13\}, \\
 c(u_i u_{i+2}) &= \begin{cases} m-1, & i = 1, \\ 2i, & i = 2. \end{cases} \\
 c(u_i u_4) &= \begin{cases} m-2i, & i = 1, \\ i, & i = 3. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Pewarnaan pelangi pada graf G untuk $m = 9$ dapat dilihat pada Gambar 4.

Tabel 3. Lintasan Pelangi ($K_4 \odot AP_5$)

Kasus	x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1	u_i	$v_{j,k}$	$i = 1, j \in [2, 4], k \in [1, m]$ $i = 2, j = \{1, 3, 4\}, k \in [1, m]$ $i = 3, j = \{1, 2, 4\}, k \in [1, m]$ $i = 4, j \in [1, 3], k \in [1, m]$	$u_i, u_j, v_{j,k}$ $u_i, u_j, v_{j,k}$ $u_i, u_j, v_{j,k}$ $u_i, u_j, v_{j,k}$
2	u_i	$w_{j,k}$	$i = 1, j \in [2, 4], k \in [1, m]$ $i = 2, j = \{1, 3, 4\}, k \in [1, m]$ $i = 3, j = \{1, 2, 4\}, k \in [1, m]$ $i = 4, j \in [1, 3], k \in [1, m]$	$u_i, u_j, w_{j,k}$ $u_i, u_j, w_{j,k}$ $u_i, u_j, w_{j,k}$ $u_i, u_j, w_{j,k}$
3	$v_{i,j}$	$v_{i,k}$	$i \in [1, 4], j \in [1, m-2], k \in [3, m]$ $i \in [1, 4], j, k = \{(1, 4), (2, 5)\}$	$v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i,k}$ $v_{i,j}, u_i, v_{i,k}$
4	$w_{i,j}$	$w_{i,k}$	$i \in [1, 4], j \in [1, m-2], k \in [3, m]$ $i \in [1, 4], j, k = \{(1, 4), (2, 5)\}$	$w_{i,j}, w_{i,j+1}, w_{i,k}$ $w_{i,j}, u_i, w_{i,k}$
5	$v_{i,j}$	$w_{i,k}$	$i \in [1, 4], j \in [1, m-1], k \in [2, m]$ $i \in [1, 4], j = m, k = 3$ $i \in [1, 4], j \in [1, m-2], k \in [3, m]$ $i \in [1, 4], j, k = \{(1, 4), (2, 5), (3, 1), (4, 2)\}$ $i \in [1, 4], j = m, k = \{1, 2\}$ $i \in [1, 4], j = 4, k = 1$	$v_{i,j}, w_{i,j}, w_{i,k}$ $v_{i,j}, w_{i,k+1}, w_{i,k}$ $v_{i,j}, u_i, w_{i,k}$ $v_{i,j}, u_i, w_{i,k}$ $v_{i,j}, u_i, w_{i,k}$ $v_{i,j}, u_i, w_{i,k}$
6	$v_{i,k}$	$v_{j,k}$	$i \in [1, 3], j \in [2, 4], k \in [1, m]$ $i = \{3, 4\}, j = 1, k \in [1, m]$ $i = 2, j = 4, k \in [1, m]$	$v_{i,k}, u_i, u_j, v_{j,k}$ $v_{i,k}, u_i, u_j, v_{j,k}$ $v_{i,k}, u_i, u_j, v_{j,k}$
7	$w_{i,k}$	$w_{j,k}$	$i \in [1, 3], j \in [2, 4], k \in [1, m]$ $i = \{3, 4\}, j = 1, k \in [1, m]$ $i = 2, j = 4, k \in [1, m]$	$w_{i,k}, u_i, u_j, w_{j,k}$ $w_{i,k}, u_i, u_j, w_{j,k}$ $w_{i,k}, u_i, u_j, w_{j,k}$
8	$v_{i,j}$	$w_{k,j}$	$i \in [1, m-2], j \in [1, m], k \in [2, m-1]$ $i, k = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}, j \in [1, m]$ $i, k = \{(1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}, j \in [1, m]$	$v_{i,j}, u_i, u_k, w_{k,j}$ $v_{i,j}, u_i, u_k, w_{k,j}$ $v_{i,j}, u_i, u_k, w_{k,j}$



Gambar 4. Pewarnaan pelangi graf ($K_4 \odot AP_6$)

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa untuk setiap x dan y di titik u, v dan w dengan $d(u, v, w) \geq 2$ terdapat lintasan pelangi dengan pewarnaan c , sedangkan untuk setiap dua titik pada graf G yang saling bertetangga jelas terdapat lintasan pelangi. Untuk lintasan pelangi pada setiap pada titik di $x, y \in V(G)$ dengan kondisi $m + 1 = 1$ dapat dilihat pada Tabel 4.

Tabel 4. Lintasan Pelangi ($K_4 \odot AP_6$)

Kasus	x	y	Kondisi	Lintasan Pelangi
1	u_i	$v_{j,k}$	$i = 1, j \in [2, 4], k \in [1, m]$ $i = 2, j = \{1, 3, 4\}, k \in [1, m]$ $i = 3, j = \{1, 2, 4\}, k \in [1, m]$ $i = 4, j \in [1, 3], k \in [1, m]$	$u_i, u_j, v_{j,k}$ $u_i, u_j, v_{j,k}$ $u_i, u_j, v_{j,k}$ $u_i, u_j, v_{j,k}$
2	u_i	$w_{j,k}$	$i = 1, j \in [2, 4], k \in [1, m]$ $i = 2, j = \{1, 3, 4\}, k \in [1, m]$ $i = 3, j = \{1, 2, 4\}, k \in [1, m]$ $i = 4, j \in [1, 3], k \in [1, m]$	$u_i, u_j, w_{j,k}$ $u_i, u_j, w_{j,k}$ $u_i, u_j, w_{j,k}$ $u_i, u_j, w_{j,k}$
3	$v_{i,j}$	$v_{i,k}$	$i \in [1, 4], j \in [1, m-1], k \in [3, m+1]$ $i \in [1, 4], j \in [1, 3], k \in [4, m]$ $i \in [1, 4], j = 2, k = m$	$v_{i,j}, v_{i,j+1}, v_{i,k}$ $v_{i,j}, u_i, v_{i,k}$ $v_{i,j}, v_{i,j-1}, v_{i,k}$
4	$w_{i,j}$	$w_{i,k}$	$i \in [1, 4], j \in [1, m-1], k \in [3, m+1]$ $i \in [1, 4], j \in [1, 3], k \in [4, m]$ $i \in [1, 4], j = 2, k = m$	$w_{i,j}, w_{i,j+1}, w_{i,k}$ $w_{i,j}, u_i, w_{i,k}$ $w_{i,j}, w_{i,j-1}, w_{i,k}$
5	$v_{i,j}$	$w_{i,k}$	$i \in [1, 4], j \in [1, m-1], k \in [3, m+1]$ $i \in [1, 4], j \in [2, m], k \in [1, m-1]$ $i \in [1, 4], j, k = \{(1, 6), (6, 2)\}$ $i \in [1, 4], j, k = \{(1, 5), (2, 6), (3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)\}$ $i \in [1, 4], j, k = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)\}$	$v_{i,j}, w_{i,j+1}, w_{i,k}$ $v_{i,j}, w_{i,k+1}, w_{i,k}$ $v_{i,j}, w_{i,k+1}, w_{i,k}$ $v_{i,j}, u_i, w_{i,k}$
6	$v_{i,k}$	$v_{j,k}$	$i \in [1, 3], j \in [2, 4], k \in [1, m]$ $i = \{3, 4\}, j = 1, k \in [1, m]$ $i = 2, j = 4, k \in [1, m]$	$v_{i,k}, u_i, u_j, v_{j,k}$ $v_{i,k}, u_i, u_j, v_{j,k}$ $v_{i,k}, u_i, u_j, v_{j,k}$
7	$w_{i,k}$	$w_{j,k}$	$i \in [1, 3], j \in [2, 4], k \in [1, m]$ $i = \{3, 4\}, j = 1, k \in [1, m]$ $i = 2, j = 4, k \in [1, m]$	$w_{i,k}, u_i, u_j, w_{j,k}$ $w_{i,k}, u_i, u_j, w_{j,k}$ $w_{i,k}, u_i, u_j, w_{j,k}$
8	$v_{i,j}$	$w_{k,j}$	$i \in [1, m-2], j \in [1, m], k \in [2, m-1]$ $i, k = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}, j \in [1, m]$ $i, k = \{(1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}, j \in [1, m]$	$v_{i,j}, u_i, u_k, w_{k,j}$ $v_{i,j}, u_i, u_k, w_{k,j}$ $v_{i,j}, u_i, u_k, w_{k,j}$

□

5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa:

- (1) Jika $G \cong (AP_m \odot K_4)$, dimana AP_m adalah graf antiprisma dengan $m \geq 3$ dan

K_4 adalah graf lengkap dengan 4 titik, maka

$$\text{diam}(G) = \begin{cases} m+1, & \text{untuk } m=3, \\ m, & \text{untuk } m=4 \text{ dan } m=5, \\ m-1, & \text{untuk } m=6 \text{ dan } m=7, \end{cases}$$

$$rc(G) = 2m.$$

(2) Jika $G \cong (K_4 \odot AP_m)$, maka:

$$\text{diam}(G) = 3, \text{ untuk } 3 \leq m \leq 9,$$

$$rc(G) = \begin{cases} 4, & \text{untuk } m=3 \text{ dan } m=4, \\ 2m-2, & \text{untuk } 5 \leq m \leq 9, m \text{ ganjil}, \\ 2m, & \text{untuk } 5 \leq m \leq 9, m \text{ genap}, \end{cases}$$

Daftar Pustaka

- [1] Afriantini, Helmi., Fran, F., 2019, Pewarnaan Simpul, Sisi, Wilayah pada Graf dan Penerapannya, *Bimaster Ilmiah. Stat. dan Terapannya*, **8**(4): 773 – 782
- [2] Ardiansyah, R., 2013, Bilangan Kromatik Graf Hasil Amalgamasi Dua Buah Graf, *Jurnal Sains dan Seni POMITS*, **2**(1): 1 – 5
- [3] Budayasa, I. K., 2021, Bilangan Keterhubungan Pelangi Graf "Snark" Bunga, *Jurnal Ilmiah Matematika*, **09**(01): 89 – 95
- [4] Chartrand, G., Kalamazoo., Johns, G. L., Valley, S., Mckee, K. A., London, N., Zhang, P., Kalamazoo., 2008, Rainbow Connection in Graphs, *Mathematica Bohemica*, **133**(1): 85 – 98
- [5] Darmawan, R. N., Dafik., 2014, Rainbow Connection Number of Prism and Product of Two Graphs, *Prosiding Seminar Nasional Matematika Jember*, **1**(1): 10 – 17
- [6] Fitriani, F., Cahyaningtias, S., 2021, Graf Dual Antiprisma dan Dimensi Metriknya, *E-Jurnal Matematika*, **10**(1): 6 – 11
- [7] Hader, A. E., 2020, Bilangan Terhubung Pelangi pada Graf Korona Kipas dan Roda dengan Graf Trivial, *Jurnal SIMTIKA*, **3**(1) : 31 – 34
- [8] Harsya, A. Y., Agustin, I. H., Dafik., 2014, Pewarnaan Titik Pada Operasi Graf Sikel dengan Graf Lintasan, *Jurnal Universitas Jember*, **1**(1): 11 – 18
- [9] Lestari, D., 2020, Bilangan Keterhubungan Pelangi pada Pewarnaan-Sisi Graf, *Jurnal Ilmiah Matematika*, **8**(1): 25 – 34
- [10] Wahyuni, Y., Utoyo, M. I., Slamini., 2019, Bilangan Dominasi Graf Hasil Operasi Korona Sisi, *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, **16**(2): 135 – 146
- [11] Wijaya, R., 2013, Bilangan Rainbow Connection untuk Graf Komplemen, *Jurnal Matematika UNAND*, **2**(3): 19 – 12