

ANALISIS MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN COVID-19 DENGAN INTERVENSI VAKSINASI DAN PENGobatan

AGUSYARIF REZKA NUHA^{a,*}, NOVIANITA ACHMAD^a, NUR 'AIN SUPU^a

^a Program Studi Matematika,
Fakultas MIPA, Universitas Negeri Gorontalo,
Jl. Prof. Dr. Ing. B.J. Habibie, Tilongkabila, Kabupaten Bone Bolango,
email : agusyarif@ung.ac.id

Diterima 12 Juni 2021 Direvisi 22 Juni 2021 Dipublikasikan 26 Juli 2021

Abstrak. *Coronavirus Disease-2019* (COVID-19) merupakan suatu virus yang dapat menyebabkan penyakit menular dengan gejala batuk, demam, hilangnya indra perasa maupun penciuman, hingga sesak napas. Proses penyebaran penyakit terjadi ketika adanya kontak dari individu terinfeksi dengan individu rentan, baik secara langsung maupun tidak langsung. Penelitian ini dilakukan untuk merumuskan model matematika penyebaran COVID-19, melakukan analisis kestabilan model, dan simulasi numerik. Berdasarkan asumsi serta pertimbangan dalam membangun model diperoleh suatu model matematika penyebaran Covid-19 tipe SVIR yang terdiri atas empat kelas populasi, yaitu kelas populasi; individu rentan (S), individu terinfeksi (I), individu terinfeksi (I), dan individu sembuh dari COVID-19 (R). Sifat kestabilan titik kesetimbangan model bergantung pada perubahan nilai bilangan reproduksi dasar (R_0). Titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 bersifat stabil asimtotik lokal jika $R_0 < 1$, serta tidak stabil jika $R_0 > 1$. Titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 akan selalu ada, serta titik kesetimbangan endemik E^* unik dan positif jika dan hanya jika $R_0 > 1$. Simulasi numerik menggambarkan bahwa sistem berada pada kondisi stabil disekitar titik kesetimbangan endemik. Peningkatan laju vaksinasi dan laju efektivitas pengobatan masing-masing dapat menekan jumlah kasus infeksi COVID-19. Sedangkan peningkatan laju penyusutan vaksin dan laju penurunan efektivitas vaksin dapat mengakibatkan jumlah kasus infeksi COVID-19 terus meningkat.

Kata Kunci: COVID-19, Model SVIR, Titik Kesetimbangan

1. Pendahuluan

Sejak akhir tahun 2019, dunia dikejutkan dengan kemunculan penyakit menular di Wuhan Cina yang menyerang saluran pernapasan. Penyakit tersebut disebabkan oleh *Coronavirus Disease 2019* atau sering dikenal dengan sebutan COVID-19 [1,2]. Hingga saat ini penyakit yang diakibatkan oleh COVID-19 telah menyebar dalam 212 Negara di dunia. Bahkan pada beberapa Negara, jumlah kasus infeksi yang

*penulis korespondensi

dilaporkan telah melebihi jumlah kasus infeksi di Cina [3,4]. Pada ruangan yang tertutup dan ramai dengan sirkulasi udara kurang baik, COVID-19 akan mudah menular melalui percikan dahak (droplet) dari saluran pernapasan. Kemampuan untuk bertahan pada benda-benda disekitar manusia, mengakibatkan penyakit ini menular dengan mudah. Adapun keluhan dan gejala yang dirasakan oleh pasien COVID-19 berbeda-beda, hal ini dipengaruhi oleh berbagai faktor seperti daya tahan tubuh, umur pasien dan penyakit bawaan. Namun keluhan yang pada umumnya dirasakan oleh penderita adalah, demam dan batuk [5].

Kecepatan penyebaran COVID-19 serta besarnya dampak yang ditimbulkan, mengakibatkan virus ini telah ditetapkan sebagai pandemi global oleh *World Health Organization* (WHO). Berdasarkan data yang diperoleh dari WHO, sampai dengan tahun 2021 tercatat lebih dari 83 juta kasus infeksi COVID-19, serta total kematian melebihi 1,8 juta jiwa di seluruh dunia [6]. Indonesia merupakan salah satu Negara yang ikut merasakan dampak dari penyebaran virus ini. Hingga awal 2021, jumlah kasus infeksi COVID-19 di Indonesia yang dilaporkan telah melebihi 750 ribu kasus infeksi dengan total kematian melebihi 22 ribu jiwa [7].

Berbagai cara telah dilakukan oleh pemerintah untuk mengurangi atau menghentikan penyebaran COVID-19 mulai dari penerapan *lockdown* antar wilayah serta protokol kesehatan berupa; memakai masker, mencuci tangan, menjaga jarak, karantina, hingga penggunaan vaksin [8]. Sejak akhir tahun 2020 pemerintah terus mempersiapkan program vaksinasi yang akan dilakukan secara bertahap [9]. Vaksinasi sendiri bertujuan untuk membentuk antibodi serta memperkecil terjadinya gejala berat dan komplikasi yang diakibatkan COVID-19. Vaksinasi juga diharapkan dapat menekan jumlah kasus infeksi dan menurunkan angka kematian yang diakibatkan penyakit ini [10]. Selain perhatian yang telah diberikan pemerintah juga dibutuhkan peranan dari seluruh lapisan masyarakat, untuk menghentikan penyebaran COVID-19. Tidak terkecuali dari kalangan akademisi, khususnya praktisi matematika.

Salah satu bidang matematika yang mempelajari dinamika penyebaran virus adalah pemodelan matematika. Sejauh ini telah banyak praktisi matematika yang menggunakan model matematika untuk mempelajari dan membahas dinamika penyebaran COVID-19. Diantaranya penelitian mengenai model matematika penyebaran COVID-19 tipe SIR yang terdapat pada [11]. Model tersebut membagi populasi manusia kedalam tiga kelas subpopulasi yang terdiri atas; individu rentan (S), individu terinfeksi (I), dan individu sembuh (R). Beberapa parameter yang menjadi pertimbangan model diantaranya adalah efektivitas vaksin, efektivitas protokol kesehatan, dan efektivitas pengobatan. Selain itu, penelitian terkait model matematika penyebaran COVID-19 juga dapat dijumpai pada [12,13,15,15,16,17,18,19,20].

Program vaksinasi di Indonesia telah dimulai sejak pertengahan Januari 2021. Sebelum digunakan, pemerintah telah melakukan serangkaian uji coba untuk memastikan keamanan penggunaan vaksin tersebut. Namun pada beberapa Negara termasuk Indonesia, ditemukan adanya kasus infeksi COVID-19 setelah pemberian vaksin [21]. Hal ini menunjukkan bahwa seseorang yang telah menerima vaksin masih memiliki kemungkinan untuk terinfeksi atau dengan kata lain vaksin

tidak 100% membuat seseorang menjadi kebal dari COVID 19 [22,23]. Tetapi kemungkinan tersebut sangat kecil dibandingkan dengan seseorang yang belum menerima vaksin sama sekali. Selain itu, daya tahan vaksin dalam membentuk antibodi kemungkinan tidak dapat bertahan seumur hidup yang berarti perlu adanya vaksinasi ulang dalam 1-2 tahun setelah menerima vaksin pertama [24].

Berdasarkan hal tersebut, akan dikaji suatu pendekatan model matematika terkait efektivitas vaksin dan pengobatan COVID-19. Model matematika yang menjadi rujukan utama adalah model matematika tipe SIR yang terdapat pada [11]. Model tersebut dimodifikasi dengan menambahkan variabel baru yang menginterpretasikan kelas populasi individu tervaksin. Beberapa penelitian terkait penentuan kelas populasi vaksinasi sebagai variabel model juga dapat dilihat pada [25,26]. Hal-hal yang menjadi pertimbangan pada kelas populasi individu tervaksin adalah adanya kemungkinan individu akan tertular penyakit, serta kemungkinan terjadinya penyusutan vaksin yang menyebabkan individu tervaksin dapat kembali menjadi rentan dalam jangka waktu tertentu. Untuk melihat efektivitas pengobatan, penentuan parameternya mengikuti sebagaimana parameter yang telah dirumuskan dalam model rujukan. Model matematika yang telah terbentuk selanjutnya akan dianalisis dengan melihat sifat kestabilan dari titik kesetimbangan model. Simulasi model juga akan diberikan untuk melihat dinamika populasi manusia akibat penyebaran COVID-19.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini berpusat pada perumusan model matematika dengan berdasarkan pengkajian teori tentang sifat dan karakteristik proses penyebaran COVID-19. Adapun tahapan yang dilakukan yaitu; (1) menentukan dan merumuskan masalah, (2) mentransformasi masalah ke dalam bentuk model matematika, (3) menyusun kajian teori yang relevan dengan penyelesain model matematika, dan (4) melakukan analisis model, (5) merumuskan kesimpulan.

Model matematika yang dikonstruksi adalah model matematika penyebaran COVID-19 tipe SVIR. Untuk analisis model, langkah-langkah yang dilakukan yaitu; (1) merumuskan dinamika penyebaran Covid-19 kedalam bentuk sistem persamaan diferensial, (2) menentukan titik kesetimbangan sistem, (3) menentukan bilangan reproduksi dasar, (3) merumuskan syarat dan sifat kestabilan titik kesetimbangan serta kaitannya dengan bilangan reproduksi dasar, (4) menghitung indeks sensitivitas parameter model terhadap bilangan reproduksi dasar, (5) melakukan simulasi numerik, dan (6) menginterpretasikan hasil simulasi ke dalam fenomena nyata.

3. Pembahasan

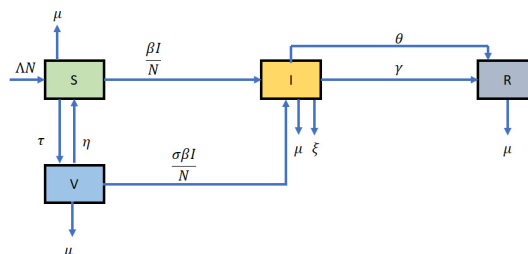
3.1. *Formulasi Model Matematika*

Model matematika penyebaran COVID-19 yang disusun merupakan hasil pengembangan atau modifikasi dari model matematika tipe *SIR* yang terdapat pada [11]. Beberapa pertimbangan dalam modifikasi model adalah penetapan variabel baru yang mewakili individu tervaksin dan adanya parameter laju penyusutan vaksin.

Modifikasi tersebut menghasilkan model matematika penyebaran COVID-19 tipe *SVIR*. Model matematika yang dibangun membagi populasi manusia ke 2. dalam empat kelas populasi yaitu; kelas populasi individu rentan (S), kelas populasi individu tervaksin (V), kelas populasi individu terinfeksi (I), dan kelas populasi individu sembuh dari penyakit COVID-19 (R). Untuk mendukung perhitungan jumlah individu disetiap kelas populasi, maka jumlah individu pada waktu t kami nyatakan sebagai $S(t)$, $V(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$. Sehingga total populasi pada waktu t , yaitu $N(t)$ dapat dihitung dengan $N(t) = S(t) + V(t) + I(t) + R(t)$.

Setiap individu yang baru yang lahir akan masuk pada kelas individu rentan dengan laju sebesar Λ . Populasi individu rentan merepresentasikan populasi manusia yang belum pernah terinfeksi serta tidak memiliki imun tubuh untuk melawan COVID-19. Individu rentan yang diberi vaksin akan masuk ke dalam kelas individu tervaksin dengan laju sebesar τ . Setiap jenis vaksin memiliki tingkat efektivitas yang berbeda, tidak terkecuali pada vaksin COVID-19. Kami mengasumsikan laju penurunan efektivitas vaksin adalah sebesar σ . Vaksin yang tidak memiliki pengaruh terhadap kekebalan tubuh memiliki nilai $\sigma = 1$, sebaliknya jika nilai $\sigma = 0$ maka vaksin tersebut sangat ampuh dalam membentuk kekebalan tubuh sehingga tidak akan terinfeksi COVID-19. Selain itu, individu tervaksin dapat masuk kembali ke dalam kelas individu rentan jika vaksin yang diberikan telah menyusut dengan laju penyusutan sebesar η .

Setiap individu rentan dan individu tervaksin yang melakukan kontak dengan individu terinfeksi dapat berpotensi tertular penyakit dengan laju penularan sebesar β . Namun, kemungkinan penularan individu tervaksin sangatlah kecil jika dibandingkan dengan individu rentan. Hal ini dikarenakan adanya imun tubuh pada individu tervaksin untuk melawan COVID-19. Adapun populasi pada kelas individu terinfeksi memiliki kemungkinan untuk sembuh secara alami dengan laju sebesar γ atau sembuh melalui proses pengobatan dengan laju sebesar θ . Selain itu, individu pada setiap kelas populasi memiliki kemungkinan mengalami kematian dengan laju kematian alami sebesar μ . Khusus untuk kelas individu terinfeksi, selain kematian alami juga dapat mengalami kematian disebabkan oleh penyakit dengan laju sebesar ξ . Secara skematis, dinamika penyebaran COVID-19 disajikan dalam bentuk diagram kompartemen pada Gambar 1.



Gambar 1. Skema Model Penyebaran COVID-19.

Model matematika penyebaran COVID-19 tipe SVIR dalam bentuk sistem per-

samaan diferensial dirumuskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda N + \eta V - \frac{\beta IS}{N} - (\tau + \mu) S \\
 \frac{dV}{dt} &= \tau S - \frac{\sigma \beta IV}{N} - (\eta + \mu) S \\
 \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta IS}{N} + \frac{\sigma \beta IV}{N} - (\gamma + \theta + \mu + \xi) I \\
 \frac{dR}{dt} &= (\theta + \gamma) I - \mu R
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Untuk mempermudah analisis, kami melakukan penskalaan pada variabel dari sistem persamaan (3.1). Sehingga diperoleh variabel-variabel baru yang memenuhi ketentuan berikut:

$$s = \frac{S}{N}, v = \frac{V}{N}, i = \frac{I}{N}, \text{ dan } r = \frac{R}{N}.$$

Akibatnya sistem persamaan (3.1) direduksi menjadi

$$\begin{aligned}
 \frac{ds}{dt} &= \Lambda + \eta v - \beta is - (\tau + \mu) s \\
 \frac{dv}{dt} &= \tau s - \sigma \beta iv - (\eta + \mu) s \\
 \frac{di}{dt} &= \beta is + \sigma \beta iv - (\gamma + \theta + \mu + \xi) i \\
 \frac{dr}{dt} &= (\theta + \gamma) i - \mu r
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dengan menggunakan sistem persamaan (3.2), akan dilakukan kajian lanjut berupa penentuan daerah solusi, penentuan titik tetap, analisis kestabilan, dan simulasi numerik.

3.2. Analisis Model Matematika

Sistem persamaan (3.2) memiliki daerah solusi yang ditunjukkan pada Lema ?? berikut.

Lema 3.1. *Diberikan nilai awal dari setiap kelas populasi model, yaitu $s(0) \geq 0, v(0) \geq 0, i(0) \geq 0$, dan $r(0) \geq 0$. Solusi dari $\{s(t), v(t), i(t), r(t)\}$ adalah positif untuk setiap $t \geq 0$.*

Titik kesetimbangan pada sistem persamaan (3.2) diperoleh dari penyelesaian $\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{di}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0$. Penyelesaian tersebut menghasilkan dua titik kesetimbangan yaitu, titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0(s, v, i, r) = \left(\frac{\Lambda(\eta + \mu)}{\mu(\eta + \mu + \tau)}, \frac{\Lambda\tau}{\mu(\eta + \mu + \tau)}, 0, 0 \right)$ dan titik kesetimbangan endemik $E^*(s, v, i, r) =$

(s^*, v^*, i^*, r^*) , dengan:

$$\begin{aligned} s^* &= \frac{\Lambda(\eta + \mu + \sigma\beta i^*)}{(\beta i^* + \mu + \tau)(\eta + \mu + \sigma\beta i^*) - \eta\tau} \\ v^* &= \frac{\Lambda\tau}{(\beta i^* + \mu)(\eta + \mu + \sigma\beta i^*) + (\mu + \sigma\beta i^*)\tau} \\ i^* &= \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4b_1b_3}}{2b_1} \\ r^* &= \frac{(\gamma + \theta)i^*}{\mu} \end{aligned}$$

dimana:

$$\begin{aligned} b_1 &= \beta^2(\gamma + \theta + \mu + \xi)\sigma \\ b_2 &= \beta((\gamma + \theta + \mu + \xi)(\eta + \mu + \mu\sigma + \sigma\tau) - \beta\Lambda\sigma) \\ b_3 &= \mu(\gamma + \theta + \mu + \xi)(\eta + \mu + \tau) - \beta\Lambda(\eta + \mu + \sigma\tau) \end{aligned}$$

Pada penentuan bilangan reproduksi dasar ($\mathfrak{R}_0$) kami menggunakan pendekatan *the next generation matrix* dengan formula $\mathfrak{R}_0 = \rho(FV^{-1})$ [27]. Berdasarkan sistem persamaan (3.2) diperoleh matriks F dan V sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} \frac{\beta\Lambda(\eta+\mu)}{\mu(\eta+\mu+\tau)} + \frac{\beta\Lambda\sigma\tau}{\mu(\eta+\mu+\tau)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan} \\ V &= \begin{pmatrix} \gamma + \theta + \mu + \xi & 0 \\ -\gamma - \theta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi diperoleh bilangan reproduksi dasar yang merupakan nilai eigen positif terbesar dari FV^{-1} , yaitu

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{\beta\Lambda(\eta + \mu + \sigma\tau)}{\mu(\gamma + \theta + \mu + \xi)(\eta + \mu + \tau)}$$

Teorema 3.2. *Titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathfrak{R}_0 < 1$, serta tidak stabil jika $\mathfrak{R}_0 > 1$.*

Bukti. Matriks Jacobi dari titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 pada sistem persamaan (3.2) adalah:

$$J_{E_0} = \begin{pmatrix} -\mu - \tau & \eta & -\frac{\beta\Lambda(\eta+\mu)}{\mu(\eta+\mu+\tau)} & 0 \\ \tau & -\eta - \mu & -\frac{\beta\Lambda\sigma\tau}{\mu(\eta+\mu+\tau)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta\Lambda(\eta+\mu+\sigma\tau)}{\mu(\eta+\mu+\tau)} - (\gamma + \theta + \mu + \xi) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma + \theta & -\mu \end{pmatrix}$$

Berdasarkan matriks Jacobi J_{E_0} diatas diperoleh persamaan karakteristik

$$\det(J_{E_0} - \lambda I) = 0$$

atau

$$(\lambda - a_{33})(\lambda - a_{44})(\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \quad (3.3)$$

dimana:

$$a_{11} = -\mu - \tau$$

$$a_{12} = \eta$$

$$a_{21} = \tau$$

$$a_{22} = -\eta - \mu$$

$$a_{33} = \frac{\beta\Lambda(\eta+\mu+\sigma\tau)}{\mu(\eta+\mu+\tau)} - (\gamma + \theta + \mu + \xi)$$

$$a_{44} = -\mu.$$

Berdasarkan persamaan (3.3) diperoleh

$$\lambda_1 = \frac{\beta\Lambda(\eta+\mu+\sigma\tau)}{\mu(\eta+\mu+\tau)} - (\gamma + \theta + \mu + \xi) \text{ dan}$$

$$\lambda_2 = -\mu.$$

Karena semua parameter bernilai positif, mengakibatkan $\lambda_2 < 0$.

Misalkan $\mathfrak{R}_0 < 1$, maka

$$\begin{aligned} \frac{\beta\Lambda(\eta+\mu+\sigma\tau)}{\mu(\gamma+\theta+\mu+\xi)(\eta+\mu+\tau)} &< 1 \\ \frac{\beta\Lambda(\eta+\mu+\sigma\tau)}{\mu(\eta+\mu+\tau)} &< (\gamma + \theta + \mu + \xi) \\ \frac{\beta\Lambda(\eta+\mu+\sigma\tau)}{\mu(\eta+\mu+\tau)} - (\gamma + \theta + \mu + \xi) &< 0 \end{aligned}$$

akibatnya $\lambda_1 < 0$.

Adapun dua nilai eigen lainnya diperoleh dengan menganalisis persamaan karakteristik

$$(\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0.$$

Berdasarkan sifat akar persamaan kuadrat, diperoleh:

$$\begin{aligned} \lambda_3 + \lambda_4 &= a_{11} + a_{22} \Leftrightarrow \lambda_3 + \lambda_4 = -2\mu - \tau - \eta \text{ dan} \\ \lambda_3\lambda_4 &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \Leftrightarrow \lambda_3\lambda_4 = \mu(\eta + \mu + \tau) \end{aligned}$$

Karena semua parameter bernilai positif, maka

$$\lambda_3 + \lambda_4 < 0 \tag{3.4}$$

$$\lambda_3\lambda_4 > 0 \tag{3.5}$$

Kondisi (3.4) hanya akan dipenuhi jika minimal salah satu dari nilai eigen bernilai negatif.

Misalkan $\lambda_3 < 0$.

Berdasarkan kondisi (3.5) diperoleh $\lambda_4 < 0$. Karena semua nilai eigen memiliki tanda negatif, mengakibatkan sistem bersifat stabil asimtotik lokal. Sedangkan kondisi $\mathfrak{R}_0 > 1$, mengakibatkan salah satu nilai eigen bertanda positif, yaitu $\lambda_1 > 0$ yang mengakibatkan sistem menjadi tidak stabil. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathfrak{R}_0 < 1$, serta tidak stabil jika $\mathfrak{R}_0 > 1$. $\square$

Teorema 3.3. *Titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 akan selalu ada, serta titik kesetimbangan endemik E^* unik dan positif jika dan hanya jika $\mathfrak{R}_0 > 1$.*

Bukti. Tinjau kembali penentuan titik tetap pada sistem persamaan (3.2)

$$\Lambda + \eta v - \beta i s - (\tau + \mu) s = 0 \quad (3.6)$$

$$\tau s - \sigma \beta i v - (\eta + \mu) v = 0 \quad (3.7)$$

$$\beta i s + \sigma \beta i s - (\gamma + \theta + \mu + \xi) i = 0 \quad (3.8)$$

$$(\theta + \gamma) i - \mu r = 0 \quad (3.9)$$

Dengan melakukan substitusi pada persamaan (3.6), (3.7), dan (3.9) ke dalam persamaan (3.8) diperoleh

$$i(p_0 i^2 + p_1 i + p_2) = 0 \quad (3.10)$$

dimana:

$$p_0 = -\frac{\beta^2 \sigma (\eta + \mu + \sigma \tau)}{\mu \sigma (\eta + \mu + \tau)}$$

$$p_1 = \beta \left(\mathfrak{R}_0 - 1 - \frac{(\eta + \mu)^2 + \sigma (2\eta + \mu + \mu \sigma) \tau + \sigma^2 \tau^2}{\mu \sigma (\eta + \mu + \tau)} \right)$$

$$p_2 = (\mathfrak{R}_0 - 1) \left(\frac{(\eta + \mu + \sigma \tau)}{\sigma} \right)$$

Salah satu penyelesaian atau akar dari persamaan (3.10) adalah $i = 0$. Dengan melakukan substitusi nilai $i = 0$ ke dalam persamaan (3.6), (3.7), dan (3.9) diperoleh $s = \frac{\Lambda(\eta + \mu)}{\mu(\eta + \mu + \tau)}$, $v = \frac{\Lambda \tau}{\mu(\eta + \mu + \tau)}$, dan $r = 0$ yang merupakan titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 . Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa titik ketimbangan bebas penyakit akan selalu ada. Adapun dua akar lainnya dari persamaan (3.10) merupakan nilai dari titik kesetimbangan endemik pada i^* . Dengan menganalisis sifat akar-akar persamaan kuadrat

$$p_0 i^2 + p_1 i + p_2 = 0 \quad (3.11)$$

diperoleh

$$i_1^* + i_2^* = -\frac{p_1}{p_2} \quad (3.12)$$

$$i_1^* i_2^* = \frac{p_2}{p_0} \quad (3.13)$$

Karena $\mathfrak{R}_0 > 1$ serta semua parameter bernilai positif, maka $p_2 > 0$. Akibatnya

$$i_1^* i_2^* < 0 \quad (3.14)$$

Kondisi (3.14) hanya akan dipenuhi jika i_1^* dan i_2^* memiliki tanda yang berlawanan. Sehingga hanya terdapat satu akar i^* yang bernilai positif. Hal ini menunjukkan bahwa s^* , v^* , i^* , dan r^* ada dan unik serta bernilai positif.

Sebaliknya jika titik kesetimbangan endemik E^* unik dan positif akan dibuktikan bahwa $\mathfrak{R}_0 > 1$. Andaikan $\mathfrak{R}_0 < 1$, maka $p_1 < 0$ dan $p_2 < 0$. Berdasarkan kondisi (3.12) dan (3.13) diperoleh, $i_1^* + i_2^* < 0$ dan $i_1^* i_2^* > 0$. Hal ini akan terpenuhi jika $i_1^* < 0$ dan $i_2^* < 0$, yang berarti tidak terdapat titik kesetimbangan endemik E^* bernilai positif. Jadi, titik kesetimbangan endemik E^* akan bernilai positif jika $\mathfrak{R}_0 > 1$.

Andaikan $\mathfrak{R}_0 = 1$, maka $p_1 < 0$ dan $p_2 = 0$. Berdasarkan kondisi (3.12) dan (3.13) diperoleh, $i_1^* + i_2^* < 0$ dan $i_1^* i_2^* = 0$, yang akan terpenuhi jika salah satu akar bernilai nol dan lainnya bernilai negatif. Jadi tidak terdapat titik kesetimbangan endemik E^* bernilai positif. $\square$

Implikasi dari Lema 3.1, Teorema 3.2, dan Teorema 3.3 dapat menjadi patokan untuk menentukan kondisi terjadinya wabah dengan ambang batas $\mathcal{R}_0$. Kondisi ketika $\mathcal{R}_0 > 1$ menunjukkan bahwa penyakit akan berkembang menjadi wabah, sebaliknya kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$ menunjukkan bahwa penyakit akan menghilang dari sistem.

3.3. Simulasi Numerik

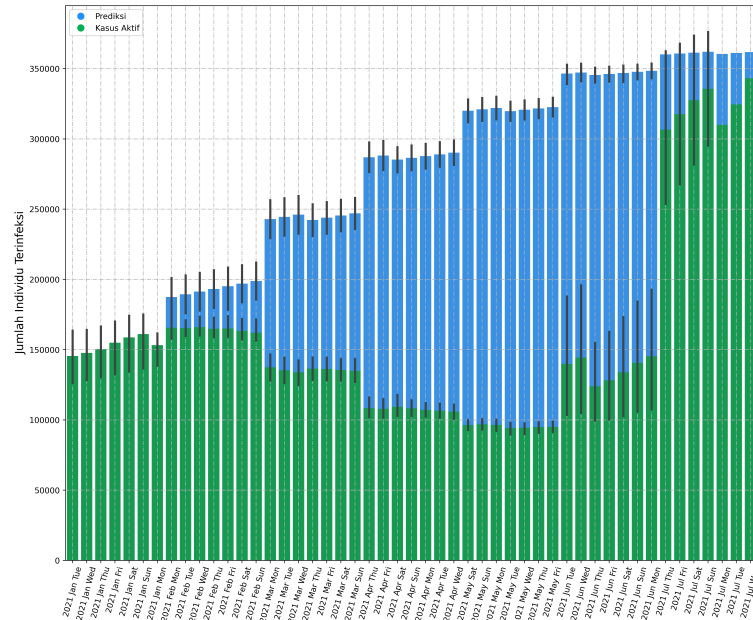
Proses yang dilakukan pada tahap ini adalah membuat suatu simulasi yang merupakan penyelesaian numerik dari sistem (3.2). Tujuannya adalah untuk memperlihatkan secara visual sifat kestabilan dari titik kesetimbangan. Selain itu, dengan melakukan simulasi numerik kita dapat melihat perubahan yang bersifat dinamik dari setiap kelas populasi pada model. Agar simulasi dapat berjalan, terlebih dahulu dibutuhkan penetapan nilai awal dari setiap variabel dan parameter model. Kami menggunakan nilai awal variabel $s(0) = 0,997$, $v(0) = 0$, $i(0) = 0,47 \times 10^{-3}$, dan $r(0) = 0,27 \times 10^{-2}$. Estimasi parameter dapat dilakukan dengan menggunakan pendekatan yang terdapat pada [28]. Nilai awal parameter yang digunakan dalam melakukan simulasi numerik dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Nilai Parameter Model SVIR

Parameter	Simbol	Nilai	Sumber
Laju kelahiran	Λ	$6,82 \times 10^{-3}/\text{hari}$	Estimasi
Laju kematian alami	μ	$6,25 \times 10^{-3}/\text{hari}$	[11]
Laju vaksinasi	τ	$0,0074/\text{hari}$	Estimasi
Laju penyusutan vaksin	η	$0,0027/\text{hari}$	Estimasi
Laju infeksi	β	$0,084/\text{hari}$	Estimasi
Laju penurunan efektivitas vaksin	σ	$0,6/\text{hari}$	Estimasi
Laju kematian akibat COVID-19	ξ	$2,2114 \times 10^{-4}/\text{hari}$	[11]
Laju efektivitas pengobatan	θ	$0,06/\text{hari}$	Estimasi
Laju kesembuhan alami	γ	$1,042 \times 10^{-3}/\text{hari}$	[11]

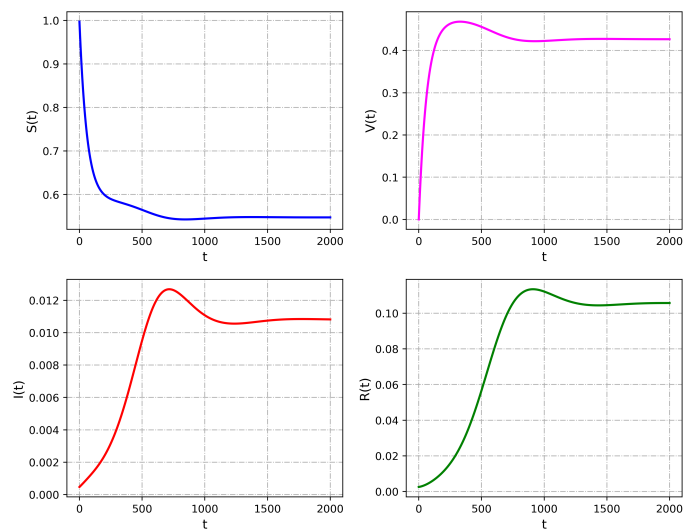
Dengan menggunakan nilai parameter model pada Tabel 1, diperoleh nilai $\mathcal{R}_0 = 1,112$. Berdasarkan Teorema 3.3, kondisi ini akan mengakibatkan munculnya titik kesetimbangan endemik E^* , serta berdasarkan Teorema 3.2 titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 bersifat tidak stabil. Hal ini menunjukkan bahwa penyebaran COVID-19 akan mengakibatkan terjadinya wabah, serta virus akan selalu ada pada sistem. Hasil perhitungan kami sejak pemberian vaksin pada bulan Januari 2021, jumlah kasus infeksi di Indonesia masih terus mengalami peningkatan. Perbandingan antara hasil prediksi kami dengan jumlah kasus aktif/terinfeksi dapat dilihat pada Gambar 2.

Pada Gambar 2 terlihat bahwa hasil prediksi jumlah individu terinfeksi dengan menggunakan model SVIR cukup dekat dengan kasus aktif yang dilaporkan pada periode Januari hingga Februari. Untuk periode Maret hingga Juni terjadi penurunan pada jumlah kasus aktif, tetapi pada bulan Juli mengalami peningkatan yang



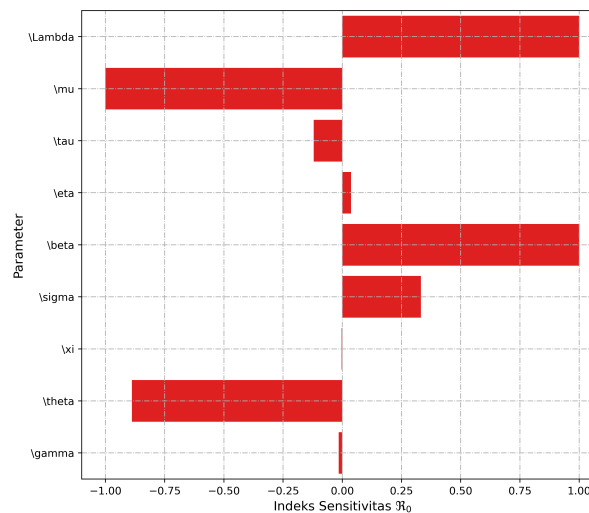
Gambar 2. Perbandingan Jumlah Kasus Aktif COVID-19 di Indonesia dengan Hasil Prediksi pada Model SVIR.

cukup drastis hingga mendekati hasil prediksi. Adapun dinamika pada setiap kelas populasi akibat penyebaran COVID-19 dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Dinamika Populasi Manusia Ketika Terjadi Penyebaran COVID-19.

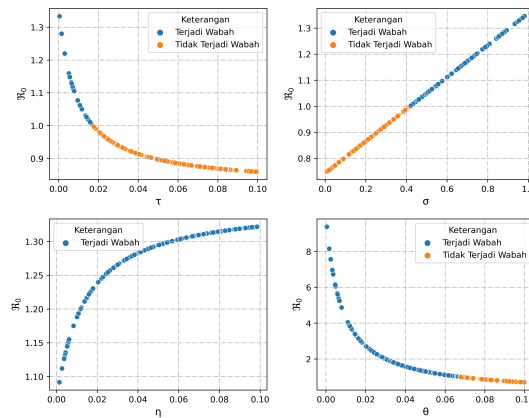
Berdasarkan Gambar 3, jumlah individu rentan mengalami penurunan hingga akhirnya stabil disekitar titik 0,54. Hal ini menunjukkan bahwa seiring berjalannya waktu jumlah individu rentan akan terus berkurang hingga jumlahnya stabil dengan nilai sebesar 54% dari total populasi manusia. Berbeda dengan jumlah individu tervaksin yang terus mengalami peningkatan hingga mencapai 42% dari total populasi manusia. Adapun jumlah individu terinfeksi juga mengalami peningkatan diawal waktu namun kemudian turun dan berfluktuasi hingga akhirnya stabil disekitar titik 0,011. Angka tersebut menjelaskan bahwa jumlah individu yang terinfeksi COVID-19 akan terus ada dengan jumlah sebesar 1,1% dari total populasi manusia. Sedangkan jumlah idividu sembuh dari COVID-19 mengalami peningkatan diawal waktu dengan jumlah diatas 10% dari total populasi manusia, namun kemudian menurun dan stabil disekitar titik 0,1. Selanjutnya kami melakukan perhitungan indeks sensitivitas bilangan reproduksi dasar untuk melihat seberapa besar perubahan nilai parameter memiliki pengaruh terhadap perubahan nilai $\mathcal{R}_0$. Nilai indeks sensitivitas dapat menjadi pertimbangan dalam membuat kebijakan untuk menurunkan bilangan reproduksi dasar. Perhitungan indeks sensitivitas $\mathcal{R}_0$ pada artikel ini, kami menggunakan formula yang dirumuskan [29] dengan hasil perhitungan dapat dilihat pada Gambar 4.



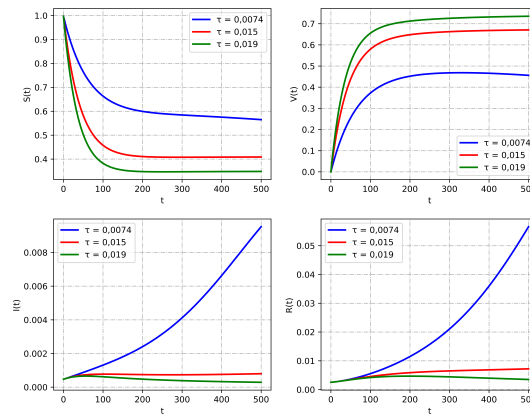
Gambar 4. Nilai Indeks Sensitivitas $\mathcal{R}_0$ Terhadap Parameter Model SVIR.

Pada Gambar 4, terlihat bahwa parameter yang paling sensitif terhadap perubahan nilai $\mathcal{R}_0$ adalah laju kelahiran, laju kematian dan laju infeksi. Sedangkan parameter yang paling kecil memberikan efek terhadap perubahan nilai $\mathcal{R}_0$ adalah laju kematian akibat COVID-19. Adapun parameter yang selanjutnya menjadi fokus pengamatan kami terhadap perubahan $\mathcal{R}_0$ adalah laju vaksinasi, laju penyusutan vaksin, laju penurunan efektivitas vaksin, dan laju efektivitas pengobatan. Nilai indeks sensitivitas τ adalah -0,121, hal ini menunjukkan bahwa peningkatan laju

vaksinasi sebesar satu satuan akan menurunkan nilai $\mathcal{R}_0$ sebesar 0,121 satuan. Hal serupa juga berlaku pada parameter θ dengan nilai indeks sensitivitas -0,888, yang berarti peningkatan laju efektivitas kesembuhan sebesar satu satuan akan menurunkan nilai $\mathcal{R}_0$ sebesar 0,888 satuan. Adapun peningkatan laju penyusutan vaksin dan laju penurunan efektivitas vaksin sebesar satu satuan masing masing akan meningkatkan nilai $\mathcal{R}_0$ sebesar 0,037 satuan dan 0,332 satuan. Pengaruh perubahan nilai keempat parameter tersebut terhadap perubahan nilai $\mathcal{R}_0$ secara visual dapat dilihat pada Gambar 5.

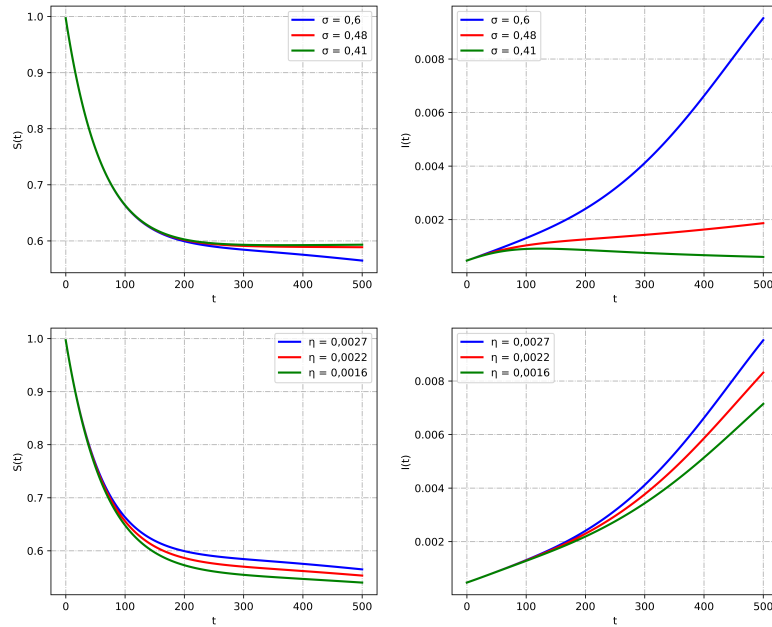
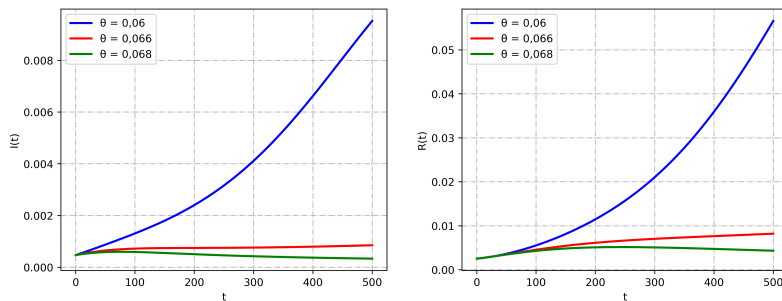


Gambar 5. Pengaruh Parameter τ , σ , η , dan θ Terhadap Perubahan $\mathcal{R}_0$.



Gambar 6. Pengaruh Parameter τ Terhadap Dinamika S , V , I , dan R .

Peningkatan nilai parameter τ dengan nilai parameter lain dianggap konstan dapat menurunkan nilai $\mathcal{R}_0$ sesuai dengan yang ditunjukkan pada Gambar 5. Selain itu, pemberian vaksin dengan laju vaksinasi diatas 1,9% perhari mampu mem-

Gambar 7. Pengaruh Parameter σ dan η Terhadap Dinamika S dan I.Gambar 8. Pengaruh Parameter θ Terhadap Dinamika I dan R.

bawa sistem berada pada kondisi tidak terjadi wabah. Hal serupa juga berlaku pada peningkatan nilai parameter θ yang mampu menurunkan nilai $\mathcal{R}_0$. Serta keberhasilan pengobatan minimal 6,8% perhari dapat membawa sistem pada kondisi tidak terjadi wabah. Adapun peningkatan nilai parameter σ dan τ dapat mengakibatkan peningkatan nilai $\mathcal{R}_0$. Laju penurunan efektivitas vaksin diatas 41% dapat membawa sistem berada pada kondisi terjadi wabah. Sedangkan perubahan laju penyusutan tidak memberikan dampak pada kondisi sistem, dimana sistem selalu berada pada kondisi terjadi wabah. Selanjutnya kami melakukan pengamatan pengaruh perubahan nilai keempat parameter diatas terhadap dinamika populasi.

Proses perhitungan yang kami lakukan untuk melihat pengaruh laju vaksinasi adalah meningkatkan parameter τ menjadi 1,5% dan 1,9% perhari. Peningkatan

tersebut dapat menurunkan jumlah individu pada kelas populasi rentan, kelas populasi terinfeksi, dan kelas populasi sembuh dari COVID-19 seperti yang terlihat pada Gambar 6. Adapun jumlah individu pada kelas populasi tervaksin terus mengalami peningkatan. Selain itu laju vaksinasi sebesar 1,9% perhari dapat mengakibatkan sistem stabil pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Hal ini menunjukkan bahwa untuk menurunkan angka penularan penyakit, perlu dilakukan peningkatan laju vaksinasi minimal 1,9% perhari.

Selanjutnya Gambar 7 menunjukkan bahwa peningkatan laju penurunan efektivitas vaksin dapat menurunkan jumlah individu pada kelas populasi manusia rentan serta meningkatkan jumlah individu pada kelas populasi manusia terinfeksi. Sedangkan peningkatan laju penyusutan vaksin mengakibatkan peningkatan jumlah individu pada kedua kelas populasi. Pada perhitungan ini, kami menurunkan nilai parameter σ menjadi 48% dan 41%. Adapun nilai parameter η diturunkan menjadi 0,22% dan 0,16%. Laju penurunan efektivitas vaksin sebesar 41% dapat membawa sistem stabil pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Hal ini menunjukkan bahwa jika vaksin yang digunakan memiliki tingkat efektivitas mencapai 59%, maka vaksin sudah mampu untuk menekan jumlah penularan dan menghentikan terjadinya wabah. Adapun hasil pengamatan pada perubahan nilai laju penyusutan vaksin, terlihat bahwa sistem tetap stabil pada titik kesetimbangan endemik.

Perhitungan tahap akhir kami melakukan simulasi dengan meningkatkan nilai parameter θ menjadi 6,6% dan 6,8% perhari. Hasil perhitungan yang ditampilkan pada Gambar 8 terlihat bahwa, peningkatan laju efektivitas pengobatan dapat menurunkan jumlah individu pada kelas populasi terinfeksi. Penurunan jumlah individu juga berlaku pada kelas populasi individu sembuh dari COVID-19 jika laju efektivitas pengobatan ditingkatkan. Hal ini disebabkan karena peningkatan tersebut mengakibatkan berkurangnya jumlah penyebaran penyakit pada sistem atau lingkungan. Selain itu laju efektivitas pengobatan sebesar 6,8% perhari dapat membawa sistem stabil pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Dengan demikian untuk dapat menekan laju penularan atau menghentikan terjadinya wabah perlu ditingkatkan efektivitas pengobatan minimal sebesar 6,8% perhari.

4. Kesimpulan

Model matematika penyebaran COVID-19 tipe SVIR merupakan hasil modifikasi model matematika tipe SIR yang diperoleh dengan menambahkan kelas populasi manusia tervaksin kedalam sistem. Analisis model menghasilkan dua titik kesetimbangan yang terdiri atas titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 bersifat stabil asimtotik lokal jika $\mathcal{R}_0 < 1$, serta tidak stabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$. Titik kesetimbangan bebas penyakit E_0 akan selalu ada, serta titik kesetimbangan endemik E^* unik dan positif jika dan hanya jika $\mathcal{R}_0 > 1$. Simulasi numerik menunjukkan bahwa sistem stabil pada titik kesetimbangan endemik. Pemberian vaksin dengan laju minimal 1,9% perhari dapat menekan jumlah kasus infeksi serta menghentikan terjadinya wabah. Adapun efektivitas vaksin yang diperlukan untuk menghentikan terjadinya wabah adalah minimal sebesar 59%. Serta diperlukan tingkat keberhasilan pengobatan

minimal 6,8% perhari agar penyakit tidak berkembang menjadi wabah.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terimakasih kepada LPPM Universitas Negeri Gorontalo yang telah mendukung dan membiayai penelitian ini, serta kepada pengelola Laboratorium Komputasi Matematika Universitas Negeri Gorontalo yang telah menyediakan fasilitas untuk pelaksanaan penelitian ini.

Daftar Pustaka

- [1] Wu, Y.C., Chen, Y.S. dan Chan, Y.J., 2019, The outbreak of COVID-19 : An overview, *Journal of Cellular and Molecular Anesthesia*, **83**(3): 217 – 220
- [2] Susilo, A., Rumende, C.M., Pitoyo, C.W., Santoso, W.D., Yulianti, M., Sinto, R., Singh, G., Nainggolan, L., Nelwan, E.J., Khie, L., Widhani, A., Wijaya, E., Wicaksana, B., Maksum, M., Annisa, F., Jasirwan, O.M dan Yuniastuti, E., 2020, Coronavirus Disease 2019: Tinjauan Literatur Terkini, *Jurnal Penyakit Dalam Indonesia* —, **7**(1): 45-67
- [3] Adnan, M., Khan, S., Kazmi, A., Bashir, N dan Siddique, R., 2020, COVID-19 infection : Emergence , transmission , and characteristics of human coronaviruses, *Journal of Advanced Research*, **24**: 91-98
- [4] Bloomberg., 2020, Global Coronavirus Cases Top 10 Million, Texas Is New Epicenter in U.S.
<https://www.bloomberg.com/news/videos/2020-06-29/global-coronavirus-cases-top-10-million-texas-is-new-epicenter-in-u-s-video> (diakses 10 Juni 2021)
- [5] Marzuki, I., Bachtar, E., Zuhriyatun, F., Purba, A.M.V., Kurniasih, H., Purba, D.H., Chamidah, D., Jamaludin, Purba, B., Puspita, R., Chaerul, M., Basmar, E., Sianturi, E., Suleman, A.R., Nasrullah, Hastuti, P., Mastutie, F., Purba, S., Rahmadana, M.F dan Airlangga, E., 2021, *COVID-19 Seribu Satu Wajah*, Edisi ke-I, Yayasan Kita Menulis, Medan
- [6] World Health Organization., 2021, COVID-19 Weekly Epidemiological Update.
<https://www.who.int/publications/m/item/weekly-epidemiological-update—5-january-2021> (diakses 29 Mei 2021)
- [7] Satuan Tugas Penanganan COVID-19., 2021, Peta Sebaran Kasus COVID-19 diIndonesia.
<https://covid19.go.id/peta-sebaran> (diakses 1 Juni 2021)
- [8] Telaumbanua, D., 2020, Urgensi Pembentukan Aturan Terkait Pencegahan Covid-19 di Indonesia, *QALAMUNA: Jurnal Pendidikan, Sosial, dan Agama*, **12**(1): 59 – 70
- [9] Kementerian Kesehatan Republik Indonesia., 2020, Vaksinasi COVID-19 Dilakukan Bertahap.
<https://www.kemkes.go.id/article/view//20112400002/vaksinasi-covid-19-dilakukan-bertahap.html> (diakses 15 Juni 2021)
- [10] Pemerintah Kabupaten Bualeng Dinas Kesehatan., 2021, Efektivitas Vaksinasi Dalam Pemutusan Rantai Penularan Covid-19.
<https://dinkes.bulelengkab.go.id/informasi/detail/artikel/49-efektivitas-vaksinasi-dalam-pemutusan-rantai-penularan-covid-19> (diakses 8 Juni 2021)

- [11] Abdy, M., Side, S., Annas, S., Nur, W dan Sanusi, W., 2021, An SIR epidemic model for COVID-19 spread with fuzzy parameter: the case of Indonesia, *Advances in Difference Equations*, **2021**(1): 1 – 17
- [12] Vinitsky, S.I., Gusev, A.A., Derbov, V. L., Krassovitskiy, P.M., Penkov, F.M dan Chuluunbaatar, G., 2021, Reduced SIR Model of COVID-19 Pandemic, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **61**(3): 376 – 387
- [13] Imran, M., Wu, M., Zhao, Y., Bee, E., Alonazi, W dan Khan, M.J., 2021, Mathematical Modelling of SIR for COVID-19 Forecasting, *Revista Argentina de Clinica Psicologica*, **XXX**(1): 218 – 226
- [14] Annas, S., Pratama, M.I., Rifandi, M., Sanusi, W dan Side, S., 2020, Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia, *Chaos, Solitons and Fractals*, **139**: 1 – 7
- [15] Alenezi, M.N., Al-Anzi, F.S., Alabdulrazzaq, H., 2021, Building a sensible SIR estimation model for COVID-19 outspread in Kuwait, *Alexandria Engineering Journal*, **60**(3): 3161 – 3175
- [16] Liu, X., 2021, A simple, SIR-like but individual-based epidemic model: Application in comparison of COVID-19 in New York City and Wuhan, *Results in Physics*, **20**: 1 – 10
- [17] Din, R.U dan Algehyne, E.A., 2021, Mathematical analysis of COVID-19 by using SIR model with convex incidence rate, *Results in Physics*, **23**: 1 – 6
- [18] Lu, R., Zhao, X., Li, J., Niu, P., Yang, B., Wu, H., Wang, W., Song, H., Huang, B., Zhu, N., Bi, Y., Ma, X., Zhan, F., Wang, L., Hu, T., Zhou, H., Hu, Z., Zhou, W., Zhao, L., Chen, J., Meng, Y., Wang, J., Lin, Y., Yuan, J., Xie, Z., Ma, J., Liu, W.J., Wang, D., Xu, W., Holmes, E.C., Gao, G.F., Wu, G., Chen, W., Shi, W dan Tan, W., 2020, Genomic characterisation and epidemiology of 2019 novel coronavirus: implications for virus origins and receptor binding, *The Lancet*, **395**: 565 – 574
- [19] Comunian, A., Gaburro, R dan Giudici, M., 2020, Inversion of a SIR-based model: A critical analysis about the application to COVID-19 epidemic, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **413**: 1 – 13
- [20] Resmawan, Nuha, A.R dan Yahya, L., 2021, Analisis Dinamik Model Transmisi COVID-19 dengan Melibatkan Intervensi Karantina, *Jambura Journal of Mathematics*, **3**(1): 66-79
- [21] Alodokter., 2021, Reinfeksi COVID-19 Setelah Vaksinasi.
<https://www.alodokter.com/reinfeksi-covid-19-setelah-vaksinasi> (diakses 12 Juni 2021)
- [22] Marwan., 2020, Peran Vaksin Penanganan Pandemi COVID19, *LPPM Universitas Mulawarman*
- [23] Thompson, M.G., Burgess, J.L., Naleway, A.L., Tyner, H.L dan Yoon, S.K., 2021, Interim Estimates of Vaccine Effectiveness of BNT162b2 and mRNA-1273 COVID-19 Vaccines in Preventing SARS-CoV-2 Infection Among Health Care Personnel, First Responders, and Other Essential and Front line Workers Eight U.S. Locations, December 2020 – March 2021, *Morbidity and Mortality Weekly Report*, **70**(13): 495-500
- [24] CNBC Indonesia., 2021, Penerima Vaksin Sinovac Harus Suntik Ulang Setelah 1-2 Tahun.
<https://www.cnbcindonesia.com/tech/20210119170239-37-217216/penerima-vaksin-sinovac-harus-suntik-ulang-setelah-1-2-tahun> (diakses 12 Juni 2021)

- [25] Tian, X., Xu, R dan Lin, J., 2019, Mathematical Analysis of A Cholera Infection Model With Vaccination Strategy, *Applied Mathematics and Computation*, **361**: 517 – 535
- [26] Nuha, A.R dan Resmawan., 2020, Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Kolera dengan Mempertimbangkan Masa Inkubasi, *Jurnal Ilmiah Matematika dan Terapan*, **17**(2): 212 – 229
- [27] Driessche, P.V.D dan Watmough, J., 2002, Reproduction Numbers and Sub-threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission, *Mathematical Biosciences*, **180**: 29 – 48
- [28] Lounis, M dan Bagal, D.K., 2020, Estimation of SIR models parameters of COVID-19 in Algeria, *Bulletin of the National Research Centre*, **44**(1): 1 – 6
- [29] Chitnis, N., Hyman, J.M dan Cushing, J.M., 2020, Determining Important Parameters in the Spread of Malaria Through the Sensitivity Analysis of a Mathematical Model, *Bulletin of Mathematical Biology*, **70**: 1272 – 1296