Jurnal Matematika UNAND
Vol. **11** No. **1** Hal. 47 – 52
Edisi Januari 2022
ISSN : 2303–291X
e-ISSN : 2721–9410

SEBUAH GENERALISASI GRAF TAK BERARAH PADA HIMPUNAN BAGIAN TERBATAS DARI BILANGAN ASLI

ASRIADI*, BERTU RIANTO TAKAENDENGAN, NISKY IMANSYAH YAHYA
Program Studi Matematika,
FMIPA Universitas Negeri Gorontalo,
Jl. Jendral Sudirman No. 6, Gorontalo
email : asriadi@ung.ac.id, bertu@ung.ac.id, nisky@ung.ac.id

Diterima 19 Januari 2022 Direvisi 15 Maret 2022 Dipublikasikan 7 April 2022

Abstrak. Tulisan ini mengkaji tentang suatu generalisasi graf tak berarah dengan fokus pada pada himpunan bagian terbatas dari bilangan asli. Generalisasi ini adalah suatu pendekatan rigor untuk teori graf. Beberapa sifat fundamental dari generalisasi graf tak berarah akan menjadi fokus dalam tulisan ini.

Kata Kunci: Bilangan Asli, Graf.

1. Pendahuluan

Berbagai gagasan tentang teori graf dalam sistem himpunan tertentu telah lama dikaji oleh banyak matematikawan. Beberapa gagasan tersebut diantaranya dalam [1] dan [4], yang membahas teori graf dalam struktur semigrup, serta dalam [2], [3], [5], [6], [7], [8] yang membahas teori graf dalam struktur bilangan asli.

Untuk struktur bilangan asli, pada [4] Chakrabarty telah mencetuskan bahwa suatu graf tak berarah, dinotasikan $G_{m,n}$, adalah graf dengan himpunan titik $V = \{1, 2, \cdots, n\}$, dimana $x, y \in V$ dikatakan terhubung jika dan hanya jika $x \neq y$ dan $x + y$ tidak habis dibagi m untuk $m \in \mathbb{N}$ dan $m > 1$. Dari sudut pandang lain, Costain pada [2] mengenalkan konsep graf aditif, dinotasikan sebagai $G(n, S)$, yaitu graf dengan himpunan titik $V = \{1, 2, \cdots, n\}$, dengan $a, b \in V$ disebut terhubung jika dan hanya jika $a + b \in S \subset \mathbb{N}$.

Dengan berlatarbelakang pada konsep yang telah digagas oleh Chakrabarty dan Costain tersebut, tulisan ini mengenalkan sekaligus menunjukkan beberapa sifat fundamental generalisasi graf tak berarah pada himpunan bagian terbatas dari bilangan asli.

*penulis korespondensi

2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi literatur, yaitu pengumpulan bahan penelitian melalui artikel atau literatur-literatur lain yang berkaitan dan relevan dengan graf tak berarah pada himpunan bagian terbatas dari bilangan asli.

3. Pembahasan

Sebelum masuk dalam pengkajian generalisasi graf tak berarah, berikut adalah beberapa definisi graf tak berarah yang telah diberikan pada penelitian sebelumnya.

Definisi 3.1. [4] *Misalkan terdapat $m, n \in \mathbb{N}$ dengan $m > 1$. Suatu graf tak berarah $G_{m,n}$ adalah suatu graf dengan himpunan titik $V = \{1, 2, \cdots, n\}$ dan himpunan sisi $E = \{(x, y) \in V^2 : x \neq y, \frac{x+y}{m} \notin \mathbb{N}\}$.*

Definisi 3.2. [2] *Diberikan suatu bilangan $n \in \mathbb{N}$ dan suatu himpunan berhingga $S \subset \mathbb{N}$. Suatu graf aditif, dinotasikan sebagai $G(n, S)$, adalah suatu graf dengan himpunan titik $V = \{1, 2, \cdots, n\}$, dengan $a, b \in V$ disebut terhubung jika dan hanya jika $a \neq b$ dan $a + b \in S$.*

Berikut adalah definisi dari generalisasi suatu graf tak berarah pada himpunan bagian terbatas dari bilangan asli.

Definisi 3.3. *Diberikan himpunan berhingga tak kosong $M \subset \mathbb{N}$ dan suatu fungsi $e : M^2 \to \{0, 1\}$ dengan $e(m, n) = e(n, m)$ dan $e(m, m) = 0$. Himpunan*

$$G(e, M) := (M \cup \{(m, n) \in M^2 : m \neq n, e(m, n) = 1\}) \tag{3.1}$$

*disebut suatu **granum** yang berasosiasi dengan himpunan M dan konektor e.*

Himpunan **titik** dan himpunan **sisi** dari suatu granum $G(e, M)$ berturut-turut dinyatakan sebagai

$$V[G(e, M)] := M, \tag{3.2}$$

$$E[G(e, M)] := \{(m, n) \in M^2 : m \neq n, e(m, n) = 1\}. \tag{3.3}$$

Dua titik $u, v \in V[G(e, M)]$ disebut **terhubung** jika $e(u, v) = 1$ dan disebut **tak terhubung** jika $e(u, v) = 0$. Selanjutnya, dua sisi $(p, q), (r, s) \in E[G(e, M)]$ disebut **bertetangga** jika $(p - r)(p - s)(q - r)(q - s) = 0$ dan disebut **tak bertetangga** jika $(p - r)(p - s)(q - r)(q - s) \neq 0$.

Graf tak berarah $G_{m,n}$ pada Definisi 3.1 adalah suatu granum yang berasosiasi dengan himpunan $V = \{1, 2, \cdots, n\}$ dan konektor

$$g(i, j) = \Big(\operatorname{sgn} |i - j|\Big)\Big(\operatorname{sgn}\Big(\frac{i + j}{m} - \lfloor \frac{i + j}{m} \rfloor\Big)\Big). \tag{3.4}$$

untuk setiap $i, j \in V$. Sedangkan pada Definisi 3.2, graf aditif $G(n, S)$ adalah suatu granum yang berasosiasi dengan himpunan $V = \{1, 2, \cdots, n\}$ dan konektor

$$h(i, j) = \Big(\operatorname{sgn} |i - j|\Big)\Big(1 - \operatorname{sgn}\Big(\prod_{k \in S} |i + j - k|\Big)\Big). \tag{3.5}$$

Definisi 3.4. *Diberikan suatu granum $G(e, M)$.* ***Derajat*** *suatu titik $i \in V[G(e, M)]$ dinyatakan sebagai*

$$\rho(i) := \sum_{j \in M} e(i, j). \tag{3.6}$$

Modulus titik *dari granum $G(e, M)$ dinyatakan sebagai*

$$\|V[G(e, M)]\| := |M|. \tag{3.7}$$

Sedangkan ***modulus sisi*** *dari granum $G(e, M)$ dinyatakan sebagai*

$$\|E[G(e, M)]\| := \frac{1}{2} \sum_{i,j \in M} e(i, j). \tag{3.8}$$

Derajat minimum dan **derajat maksimum** dari dari suatu granum $G(e, M)$ berturut-turut dituliskan

$$\lambda(i) := \min\{\rho(i) : i \in M\} \tag{3.9}$$

$$\Lambda(i) := \text{maks}\{\rho(i) : i \in M\}. \tag{3.10}$$

Definisi 3.5. *suatu granum $H(f, N)$ disebut suatu* ***subgranum*** *$G(e, M)$, ditulis $H(f, N) \subseteq G(e, M)$, jika dan hanya jika $N \subseteq M$ dan $V[H(f, N)] \subseteq V[G(e, M)]$.*

Definisi 3.6. *Dua buah granum $H(f, N)$ dan $G(e, M)$ disebut* ***isomorfik****, ditulis $H(f, N) \simeq G(e, M)$, jika dan hanya jika terdapat terdapat bijeksi $\alpha : H \to G$ dimana untuk setiap $(i, j) \in E[H(f, N)]$ berlaku $(\alpha(i), \alpha(j)) \in E[G(e, M)]$. Bijeksi α disebut suatu* ***isomorpisma*** *antara granum $H(f, N)$ dan $G(e, M)$.*

Berikut adalah penamaan khusus bagi suatu granum yang isomorfik dengan granum tertentu.

Definisi 3.7. *Diberikan suatu bilangan $n \in \mathbb{N}$. suatu granum $G(e, M)$ disebut* ***granum lengkap*** *dengan n titik jika dan hanya jika granum $G(e, M)$ isomorfik dengan granum $K(f, [n])$ dimana $[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$ dan*

$$f(i, j) = \text{sgn}\,|i - j| \tag{3.11}$$

untuk setiap $i, j \in [n]$.

Contoh 3.8. Granum $P(e, M)$, dengan $M = \{2, 5, 7\}$ dan $e(2, 5) = e(2, 7) = e(5, 7) = 1$, adalah suatu granum lengkap dengan 3 titik.

Definisi 3.9. *Diberikan suatu bilangan $n \in \mathbb{N}$. suatu granum $G(e, M)$ disebut* ***granum lintasan*** *dengan n titik jika dan hanya jika granum $G(e, M)$ isomorfik dengan granum $L(f, [n])$ dimana*

$$f(i, j) = 1 - \text{sgn}\,||i - j| - 1| \tag{3.12}$$

untuk setiap $i, j \in [n]$.

Contoh 3.10. Granum $Q(e, M)$, dengan $M = \{1, 3, 4, 8\}$, $e(1, 3) = e(1, 8) = e(4, 8) = 0$, dan $e(1, 4) = e(3, 4) = e(3, 8) = 1$, adalah suatu granum lintasan dengan 4 titik.

Definisi 3.11. *Diberikan suatu bilangan $n \in \mathbb{N}$. suatu granum $G(e, M)$ disebut* ***granum sikel*** *dengan n titik jika dan hanya jika granum $G(e, M)$ isomorfik dengan granum $S(f, [n])$ dimana*

$$f(i, j) = 1 - \operatorname{sgn} |(|i - j| - 1)(|i - j| - (n - 1))| \tag{3.13}$$

untuk setiap $i, j \in [n]$.

Contoh 3.12. Granum $R(e, M)$, dengan $M = \{3, 5, 7, 9\}$, $e(3, 7) = e(5, 9) = 0$, dan $e(3, 5) = e(5, 7) = e(7, 9) = e(3, 9) = 1$, adalah suatu granum sikel dengan 4 titik.

Teorema berikut analog dengan Lema Jabat Tangan (*Handshaking Lemma*) pada graf biasa.

Teorema 3.13. *Untuk granum $G(e, M)$ berlaku $\|E[G(e, M)]\| \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan*

$$\sum_{i \in M} \rho(i) = 2 \cdot \|E[G(e, M)]\|. \tag{3.14}$$

Bukti. Dari Definisi 3.4 diperoleh

$$\|E[G(e, M)]\| = \frac{1}{2} \sum_{i,j \in M} e(i, j) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sum_{i,j \in M, i<j} e(i, j) = \sum_{i,j \in M, i<j} e(i, j).$$

Karena $e(i, j) \in \{0, 1\}$ maka

$$\|E[G(e, M)]\| = \sum_{i,j \in M, i<j} e(i, j) \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Selanjutnya, masih berdasarkan Definisi 3.4, diperoleh juga bahwa

$$\sum_{i \in M} \rho(i) = \sum_{i \in M} \sum_{j \in M} e(i, j) = \sum_{i,j \in M} e(i, j) = 2 \cdot \|E[G(e, M)]\|.$$

Bukti lengkap. $\square$

Akibat 3.14. *Diberikan suatu granum $G(e, M)$ dan fungsi $O : V[G(e, M)] \to \{0, 1\}$ dengan $O(i) := \rho(i) - 2 \cdot \lfloor \frac{\rho(i)}{2} \rfloor$ untuk $i \in V[G(e, M)$ maka $\sum_{i \in M} O(i) \equiv 0 \pmod 2$.*

Bukti. Dengan memanfaatkan Teorema 3.13 diperoleh

$$\sum_{i \in M} O(i) = \sum_{i \in M} \big(\rho(i) - 2 \cdot \lfloor \frac{\rho(i)}{2} \rfloor\big) = 2 \cdot \Big(\|E[G(e, M)]\| - \sum_{i \in M} \big(\lfloor \frac{\rho(i)}{2} \rfloor\big)\Big) \equiv 0 \pmod 2$$

yang bersesuaian dengan yang ingin ditunjukkan. $\square$

Ciri khas dari suatu granum bergantung pada bentuk konektornya. Proposisi berikut menyediakan cara untuk menentukan konektor untuk sebarang granum.

Proposisi 3.15. *Diberikan suatu granum $G(e, M)$. Jika*

$$J := \{m + n : m, n \in M, e(m, n) = 1\}$$

dan

$$S := \{|m - n| : m, n \in M, e(m, n) = 1\}$$

maka konektor e memiliki bentuk

$$e(i,j) = \Big(1 - \operatorname{sgn} \prod_{p \in J} \big|(i + j) - p\big|\Big)\Big(1 - \operatorname{sgn} \prod_{q \in S} \big||i - j| - q\big|\Big) \tag{3.15}$$

untuk setiap $i, j \in M$.

Bukti. Ambil sebarang $u, v \in M$. Pandang fungsi $e : M^2 \to \mathbb{N}$ dengan

$$f(u,v) := \Big(1 - \operatorname{sgn} \prod_{p \in J} \big|(u + v) - p\big|\Big)\Big(1 - \operatorname{sgn} \prod_{q \in S} \big||u - v| - q\big|\Big). \tag{3.16}$$

Akan ditunjukkan bahwa untuk semua $u, v \in M$ berlaku $f(u, v) = e(u, v)$. Dari (3.16) diperoleh bahwa $f(u, v) \in \{0, 1\}$, $f(u, v) = f(v, u)$, dan $f(u, u) = 0$. Jadi untuk $u = v$ dan $f(u, v) = 0 = e(u, v)$. Untuk $u \neq v$ akan dibagi menjadi dua kasus.

(Kasus 1) Jika $e(u, v) = 0$ maka untuk sebarang $q \in S$ berlaku $|u-v|-q \neq 0$. Sehingga

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \Big(1 - \operatorname{sgn} \prod_{p \in J} \big|(u + v) - p\big|\Big)\Big(1 - \operatorname{sgn} \prod_{q \in S} \big||u - v| - q\big|\Big) \\ &= \Big(1 - 1\Big)\Big(1 - \operatorname{sgn} \prod_{q \in S} \big||u - v| - q\big|\Big) \\ &= 0 \\ &= e(u,v). \end{aligned}$$

(Kasus 2) Jika $e(u, v) = 1$ maka terdapat $p_{uv} \in J$ dan $q_{uv} \in S$ dengan $(u+v)-p_{uv} = 0$ dan $|u - v| - q_{uv} = 0$. Sehingga

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \Big(1 - \operatorname{sgn} \prod_{p \in J} \big|(u + v) - p\big|\Big)\Big(1 - \operatorname{sgn} \prod_{q \in S} \big||u - v| - q\big|\Big) \\ &= \Big(1 - 0\Big)\Big(1 - 0\Big) \\ &= 1 \\ &= e(u,v). \end{aligned}$$

Jadi, untuk semua $u, v \in M$ memenuhi $f(u, v) = e(u, v)$. Dengan kata lain

$$e(i,j) = \Big(1 - \operatorname{sgn} \prod_{p \in J} \big|(i + j) - p\big|\Big)\Big(1 - \operatorname{sgn} \prod_{q \in S} \big||i - j| - q\big|\Big)$$

untuk setiap $i, j \in M$. □

4. Kesimpulan

Konsep teori granum sebagai generalisasi konsep graf tak berarah pada struktur bilangan telah dikenalkan dalam tulisan ini. Beberapa sifat fundamental juga telah diungkapkan. Diantaranya bahwa telah tersedia suatu cara untuk membangun fungsi konektor dari suatu granum.

Daftar Pustaka

[1] Bozak, J., 1964, The graphs of semigroups, *Theory of Graphs and Application*, Academic Press, New York, 119 – 125.

[2] Costain, G., 2008, *On the additive graph generated by a subset of the natural numbers*, *Disertasi*, Department of Mathematics and Statistics, McGill University, Montreal.

[3] Chakrabarty, I., Ghosh, S., Sen, M.K., 2009, Undirected power graphs of semigroups, *Semigroup Forum*, 410 – 426.

[4] Chakrabarty, I., 2015, An undirected graph on a finite subset of natural numbers, *Indian Journal Discrete Math*, **Vol. 1** No. 2: 128 – 138.

[5] Chakrabarty, I., 2019, On some structural properties of $G_{m,n}$ graphs, *Mapana Journal of Sciences*, **Vol. 18** No. 3: 45 – 52.

[6] Kauser, S.A., Kahn, A., 2019, Clique domination in an undirected graph $G_{m,n}$, *Journal of Computer and Mathematical Sciences*, **Vol. 10** No. 9: 1585 – 1588.

[7] Kauser, S.A., Parvathi, M.S., 2019, Domatic number of an undirected graph $G_{m,n}$, *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, **Vol. 9** No. 10: 7859 – 7864.

[8] Kalita, P., 2020, Some aspects of an undirected graph on a finite subset of natural numbers, *International Journal of Advanced Science and Technology*, **Vol. 29** No. 8: 6189 – 6193.