

## KESTABILAN TITIK TETAP MODEL SEIR PENYEBARAN PENYAKIT TUBERKULOSIS

MUHAFZAN\*, KHAIRUNNISA, AHMAD IQBAL BAQI

*Program Studi Sarjana Matematika,  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,  
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.  
email : muhafzan@sci.unand.ac.id, khairunnisaee@gmail.com, baqi@sci.unand.ac.id*

Diterima 21 April 2022    Direvisi 25 Januari 2024    Dipublikasikan 31 Juli 2024

**Abstrak.** Makalah ini mengkaji kestabilan titik tetap model SEIR penyebaran penyakit tuberkulosis pada populasi manusia. Ada dua titik tetap dari model SEIR, yaitu titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik. Kestabilan kedua titik tetap ditentukan dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*. Simulasi numerik memperlihatkan bahwa jumlah subpopulasi terekspose dan terinfeksi cenderung berkurang dengan berlalunya waktu.

**Kata Kunci:** Model SEIR, kestabilan, titik tetap, tuberkulosis

**Abstract.** This paper examines the fixed-point stability of the SEIR model of the spread of tuberculosis disease in the human population. There are two fixed point points of the SEIR model, namely, disease-free fixed point and endemic fixed point. The stability of the two fixed point points is determined using the *Routh-Hurwitz* criterion. Numerical simulations show that the number of exposed and infected subpopulations tends to decrease with time.

**Keywords:** SEIR model, stability, fixed points, tuberculosis

### 1. Pendahuluan

Penyakit tuberkulosis (TB) yang disebabkan oleh bakteri *mycobacterium tuberculosis* merupakan suatu penyakit menular. Bakteri ini dapat menyerang paru-paru serta kulit, tulang belakang, usus, dan bagian tubuh lainnya. Ketika seseorang yang menderita tuberkulosis batuk, bersin, atau meludah, tuberkulosis dapat menyebar ke orang lain melalui udara yang mereka hirup. [1,2,3].

Dewasa ini pencegahan terhadap penularan penyakit TB sudah sangat berkembang seiring dengan perkembangan bidang kedokteran. Pemodelan matematika juga mempunyai peran penting dalam mengkaji model epidemiologi terhadap pencegahan penyebaran penyakit tuberkulosis. Beberapa penelitian sebelumnya telah menunjukkan kegunaan model matematika dalam meramalkan penularan

\*Penulis korespondensi

tuberkulosis, sehingga berfungsi sebagai instrumen pengambilan keputusan yang berharga dalam pencegahan penyakit [3,4,5,6,7].

Dalam artikel ini, penulis menganalisis model epidemi SEIR untuk penyebaran penyakit TB. Model ini telah diajukan dalam beberapa literatur, namun demikian dalam literatur-literatur tersebut tidak diperhitungkan parameter tingkat keefektifan pengobatan pada fase terinfeksi TB, lihat [8,9,10,11].

Pada model SEIR ini, populasi manusia pada waktu  $t$  (disimbolkan dengan  $N$ ) dibagi menjadi empat kompartemen, yaitu kompartemen subpopulasi rentan (*susceptible*) pada waktu  $t$  (disimbolkan dengan  $S$ ), kompartemen subpopulasi yang sudah tertular tetapi belum dapat menularkan (*exposed*) TB pada waktu  $t$  (disimbolkan dengan  $E$ ), kompartemen subpopulasi yang telah tertular dan dapat menularkan penyakit TB ke individu lain (disimbolkan dengan  $I$ ) pada waktu  $t$ , dan kompartemen subpopulasi yang telah sembuh (*recovered*) dari penyakit TB pada saat  $t$  (disimbolkan dengan  $R$ ).

Dalam artikel ini, kestabilan titik tetap dari model SEIR ini dikaji dengan memperhitungkan parameter tingkat keefektifan pengobatan pada fase terinfeksi menggunakan teknik pelinieran dan metode *Routh-Hurwitz*. Akan diamati pengaruh parameter tingkat keefektifan pengobatan pada fase terinfeksi terhadap jumlah subpopulasi terinfeksi.

## 2. Landasan Teori

Pada bagian ini, berbagai prinsip matematika diperkenalkan untuk memeriksa kestabilan titik tetap dalam model SEIR yang berkaitan dengan penyebaran infeksi tuberkulosis.

Perhatikan sistem dinamik berikut ini:

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{h}(\mathbf{z}), \quad (2.1)$$

dengan  $\mathbf{z} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  dan  $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Secara khusus, sistem (2.1) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = B\mathbf{z}, \quad (2.2)$$

dengan  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , jika  $\mathbf{h}$  linier [12]. Suatu titik  $\mathbf{z}_e \in \mathbb{R}^n$  dikatakan titik tetap dari sistem (2.1) jika  $\mathbf{h}(\mathbf{z}_e) = \mathbf{0}$ .

### Definisi 2.1. [12]

- (1) Suatu titik tetap  $\mathbf{z}_e$  dari sistem (2.1) dikatakan stabil pada  $t = t_0$  jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , terdapat  $\delta$  sedemikian sehingga:

$$\|\mathbf{z}(t_0) - \mathbf{z}_e\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_e\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

- (2) Suatu titik tetap  $\mathbf{z}_e$  dari sistem (2.1) dikatakan stabil asimtotik pada  $t = t_0$  jika ia stabil dan terdapat  $\delta_1$  sedemikian sehingga:

$$\|\mathbf{z}(t_0) - \mathbf{z}_e\| < \delta_1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}_e\| = 0.$$

Kestabilan titik tetap dapat diketahui dengan cara melinierkan sistem nonlinier (2.1) di sekitar titik tetap  $\mathbf{z}_e$  menggunakan metode deret Taylor [12]. Dengan teknik pelinieran ini, perilaku sistem (2.1) di sekitar titik ekuilibrium  $\mathbf{z}_e$  dapat diestimasi dengan menggunakan sistem linier berikut ini:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = J_{\mathbf{z}_e} \mathbf{y}, \quad (2.3)$$

dengan  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  dan  $J_{\mathbf{z}_e}$  adalah matriks Jacobian sistem (2.1) di sekitar titik tetap  $\mathbf{z}_e$  [13].

**Teorema 2.2.** [12] *Misalkan  $\mathbf{z}_e$  adalah titik tetap hiperbolik dari sistem nonlinier (2.1) dan  $J_{\mathbf{z}_e}$  adalah Jacobian  $\mathbf{h}$  di sekitar titik  $\mathbf{z}_e$ . Titik tetap  $\mathbf{z}_e$  adalah stabil asimtotik jika bagian riil dari semua nilai eigen matriks  $J_{\mathbf{z}_e}$  adalah negatif.*

Penentuan nilai eigen dari matriks  $J_{\mathbf{z}_e}$  memerlukan penghitungan akar dari polinomial karakteristiknya. Untuk menentukan apakah persamaan karakteristik memiliki akar dengan bagian riil negatif atau tidak, kriteria *Routh-Hurwitz* berikut ini dapat digunakan.

**Teorema 2.3.** [14] (*Kriteria Routh-Hurwitz*) *Misalkan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  adalah bilangan riil dengan  $a_j = 0$  untuk  $j > n$ . Semua akar polinomial dari*

$$\gamma^n + a_1\gamma^{n-1} + a_2\gamma^{n-2} + \dots + a_{n-2}\gamma^2 + a_{n-1}\gamma + a_n = 0$$

*memiliki bagian riil negatif jika dan hanya jika determinan dari matriks*

$$H_k = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{bmatrix}$$

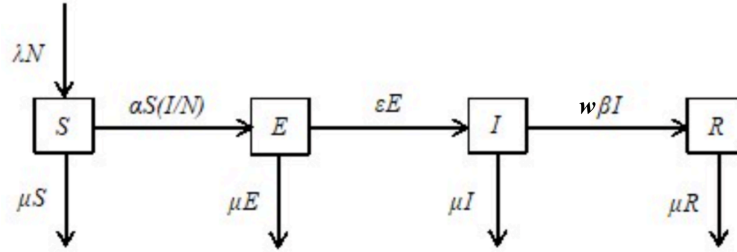
*adalah positif untuk setiap  $k = 1, 2, \dots, n$ .*

### 3. Model SEIR Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dan Kestabilannya

#### 3.1. Model SEIR Penyebaran Penyakit Tuberkulosis

Proses konstruksi model SEIR mengikuti diagram alir yang diperlihatkan dalam Gambar 1, dan parameter yang terlibat dalam mengkonstruksi model SEIR ini diberikan dalam Tabel 1. Dalam Gambar 1, panah masuk ke dalam suatu kompartemen memperlihatkan adanya penambahan anggota subpopulasi dalam kompartemen tersebut, sedangkan panah keluar dari suatu kompartemen memperlihatkan adanya pengurangan anggota subpopulasi dalam kompartemen tersebut.

Berdasarkan diagram alir dalam Gambar 1, maka model SEIR untuk penyebaran



Gambar 1. Diagram alir model SEIR

Tabel 1. Parameter model SEIR penyakit TB

| Parameter     | Deskripsi                                                        |
|---------------|------------------------------------------------------------------|
| $\lambda$     | Tingkat kelahiran                                                |
| $\mu$         | Tingkat kematian alami                                           |
| $\alpha$      | Tingkat infeksi penyakit TB                                      |
| $\varepsilon$ | Tingkat perpindahan individu dari terpapar menjadi terinfeksi TB |
| $\beta$       | Tingkat pemulihan individu yang terinfeksi TB                    |
| $w$           | Tingkat keefektifan pengobatan pada fase terinfeksi TB           |

penyakit tuberkulosis diberikan oleh sistem persamaan diferensial nonlinier [8]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \lambda N - \mu S - \alpha S \frac{I}{N}, \\
 \frac{dE}{dt} &= \alpha S \frac{I}{N} - (\varepsilon + \mu)E, \\
 \frac{dI}{dt} &= \varepsilon E - (w\beta + \mu)I, \\
 \frac{dR}{dt} &= w\beta I - \mu R.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Karena populasi terbagi atas empat kompartemen, maka berlaku:

$$N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t), \tag{3.2}$$

dengan  $N = N(t)$  menyatakan total populasi pada waktu  $t$ . Dari (3.1) diperoleh:

$$\frac{dN}{dt} = (\lambda - \mu)N, \tag{3.3}$$

yang solusinya adalah:

$$N(t) = N_0 \exp((\lambda - \mu)t), \tag{3.4}$$

dengan  $N_0$  adalah banyak populasi awal.

Dalam bentuk penskalaan, yaitu dengan memisalkan:

$$s = \frac{S}{N}, e = \frac{E}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N},$$

maka proporsi total populasi adalah  $s + e + i + r = 1$ . Oleh karena itu, model (3.1) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= \lambda - \mu s - \alpha si, \\ \frac{de}{dt} &= \alpha si - (\varepsilon + \mu)e, \\ \frac{di}{dt} &= \varepsilon e - (w\beta + \mu)i.\end{aligned}\tag{3.5}$$

dengan  $r = 1 - s - e - i$ .

### 3.2. Kestabilan Model SEIR

Untuk mengetahui kestabilan titik tetap model SEIR diperlukan penentuan titik titik tetap. Titik titik tetap diperoleh dengan membuat  $\frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} = \frac{di}{dt} = 0$ . Terdapat dua titik titik tetap untuk model SEIR ini, yaitu titik tetap bebas penyakit dan titik tetap endemik.

Titik tetap bebas penyakit terjadi jika tidak ada infeksi dan tidak ada individu yang terpapar, yaitu  $i = 0$  dan  $e = 0$ . Oleh karena itu, titik tetap bebas penyakit yang disimbolkan dengan  $E^0$ , adalah:

$$E^0 = \left( \frac{\lambda}{\mu}, 0, 0 \right).\tag{3.6}$$

Titik tetap endemik terjadi jika terdapat individu yang terinfeksi dan terpapar, yaitu  $i \neq 0$  dan  $e \neq 0$ . Oleh karena itu, titik tetap endemik yang disimbolkan dengan  $E^*$  untuk model SEIR, adalah sebagai berikut:

$$E^* = \left( \bar{s}^*, \bar{e}^*, \bar{i}^* \right),\tag{3.7}$$

dengan

$$\begin{aligned}\bar{s}^* &= \frac{(\mu + \varepsilon)(\mu + w\beta)}{\alpha\varepsilon}, \\ \bar{e}^* &= \frac{\lambda\alpha\varepsilon - \mu(\mu + \varepsilon)(\mu + w\beta)}{\alpha\varepsilon(\mu + \varepsilon)}, \\ \bar{i}^* &= \frac{\lambda\alpha\varepsilon - \mu(\mu + \varepsilon)(\mu + w\beta)}{\alpha(\mu + \varepsilon)(\mu + w\beta)}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Langkah selanjutnya adalah penentuan matriks Jacobian di titik tetap  $E^0$  dan  $E^*$ , yang dengan sederhana diperoleh:

$$J_{E^0} = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\alpha \\ 0 & -\mu - \varepsilon & \alpha \\ 0 & \varepsilon & -\mu - w\beta \end{bmatrix}, J_{E^*} = \begin{bmatrix} -\mu - \alpha\bar{i}^* & 0 & -\alpha\bar{s}^* \\ \alpha\bar{i}^* & -\mu - \varepsilon & \alpha\bar{s}^* \\ 0 & \varepsilon & -\mu - w\beta \end{bmatrix}.$$

Persamaan karakteristik matriks Jacobian  $J_{E^0}$  adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}0 &= \det(J_{E^0} - \gamma I), \\ &= \gamma^3 + (3\mu + \varepsilon + w\beta)\gamma^2 + (3\mu + 2\mu\varepsilon + 2\mu w\beta + w\varepsilon\beta - \varepsilon\alpha)\gamma \\ &\quad + (\mu^3 + \mu^2 w\beta + \mu^2 \varepsilon + \mu\varepsilon w\beta - \mu\alpha\varepsilon).\end{aligned}$$

Dengan menggunakan Teorema 2.2 dan Teorema 2.3 untuk persamaan karakteristik  $J_{E^0}$  ini, diperoleh bahwa titik tetap bebas penyakit  $E^0$  adalah stabil asimtotik jika:

- (a)  $3\mu + \varepsilon + w\beta > 0$ .
- (b)  $3\mu + 2\mu\varepsilon + 2\mu w\beta + \varepsilon w\beta - \varepsilon\alpha > 0$ .
- (c)  $\mu^3 + \mu^2 w\beta + \mu^2 \varepsilon + \mu \varepsilon w\beta - \mu \alpha \varepsilon > 0$ .
- (d)  $(3\mu + \varepsilon + w\beta)(3\mu + 2\mu\varepsilon + 2\mu w\beta + \varepsilon w\beta - \varepsilon\alpha) - (\mu^3 + \mu^2 w\beta + \mu^2 \varepsilon + \mu \varepsilon w\beta - \mu \alpha \varepsilon) > 0$ .

Selanjutnya, persamaan karakteristik matriks Jacobian  $J_{E^*}$  adalah

$$\begin{aligned} 0 &= \det(J_{E^*} - \gamma I), \\ &= \gamma^3 + \left(3\mu + \alpha\bar{i}^* + \varepsilon + w\beta\right)\gamma^2 + \left(3\mu^2 + 2\mu\varepsilon + 2\mu w\beta + 2\mu\alpha\bar{i}^* + \varepsilon\alpha\bar{i}^* \right. \\ &\quad \left. + w\beta\alpha\bar{i}^* + w\beta\varepsilon - \alpha\bar{s}^*\varepsilon\right)\gamma + \left(\mu^3 + \mu^2 w\beta + \mu^2 \varepsilon + \mu w\beta\varepsilon - \alpha\bar{s}^*\varepsilon\mu + \mu^2\alpha\bar{i}^* \right. \\ &\quad \left. + \mu w\beta\alpha\bar{i}^* + \mu\varepsilon\alpha\bar{i}^* + w\beta\varepsilon\alpha\bar{i}^*\right) \end{aligned}$$

dengan  $\bar{s}^*, \bar{i}^*$  diberikan dalam persamaan (3.8).

Dengan menggunakan Teorema 2.2 dan Teorema 2.3 untuk persamaan karakteristik  $J_{E^*}$  ini, diperoleh bahwa titik tetap endemik  $E^*$  adalah stabil asimtotik jika:

- (a)  $3\mu + \alpha\bar{i}^* + \varepsilon + w\beta > 0$ .
- (b)  $3\mu^2 + 2\mu\varepsilon + 2\mu w\beta + 2\mu\alpha\bar{i}^* + \varepsilon\alpha\bar{i}^* + w\beta\alpha\bar{i}^* + w\beta\varepsilon - \alpha\bar{s}^*\varepsilon > 0$ .
- (c)  $\mu^3 + \mu^2 w\beta + \mu^2 \varepsilon + \mu w\beta\varepsilon - \alpha\bar{s}^*\varepsilon\mu + \mu^2\alpha\bar{i}^* + \mu w\beta\alpha\bar{i}^* + \mu\varepsilon\alpha\bar{i}^* + w\beta\varepsilon\alpha\bar{i}^* > 0$ .
- (d)  $(3\mu + \alpha\bar{i}^* + \varepsilon + w\beta)(3\mu^2 + 2\mu\varepsilon + 2\mu w\beta + 2\mu\alpha\bar{i}^* + \varepsilon\alpha\bar{i}^* + w\beta\alpha\bar{i}^* + w\beta\varepsilon - \alpha\bar{s}^*\varepsilon) - (\mu^3 + \mu^2 w\beta + \mu^2 \varepsilon + \mu w\beta\varepsilon - \alpha\bar{s}^*\varepsilon\mu + \mu^2\alpha\bar{i}^* + \mu w\beta\alpha\bar{i}^* + \mu\varepsilon\alpha\bar{i}^* + w\beta\varepsilon\alpha\bar{i}^*) > 0$ .

(3.9)

### 3.3. Simulasi Numerik

Untuk memperlihatkan keabsahan hasil dari penelitian ini, asumsikan bahwa tingkat kelahiran ( $\lambda$ ) dan tingkat kematian ( $\mu$ ) adalah sama. Nilai-nilai semua parameter diberikan dalam Tabel 2.

Untuk nilai-nilai parameter ini dan  $w = 0.8$ , diperoleh titik tetap endemik  $E^* = (0.7050, 0.0765, 0.0325, 0.1860)$ . Untuk  $w = 0.55$ , diperoleh titik tetap endemik  $E^* = (0.5175, 0.1251, 0.0725, 0.2849)$ . Dapat diperiksa bahwa semua syarat  $a, b, c, d$  dalam (3.9) terpenuhi, sehingga titik tetap  $E^*$  adalah stabil asimtotik. Grafik masing-masing kompartemen diberikan dalam Gambar 2 dan Gambar 3.

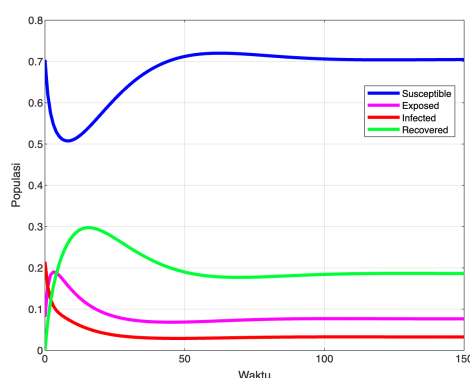
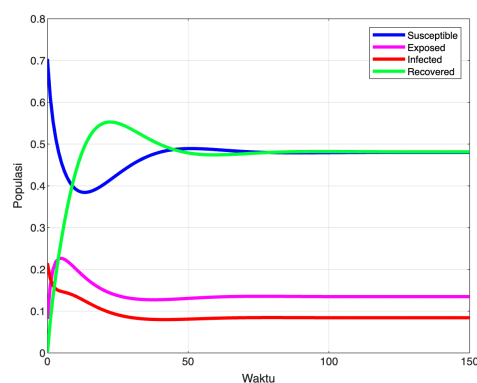
Dapat diamati bahwa semakin tinggi tingkat keefektifan pengobatan pada fase terinfeksi TB mengakibatkan jumlah subpopulasi terinfeksi semakin menurun.

## 4. Kesimpulan

Analisis model SEIR untuk penyebaran penyakit tuberkulosis memperlihatkan bahwa tingkat keefektifan pengobatan pada fase terinfeksi berpengaruh terhadap

Tabel 2. Nilai-nilai parameter

| Parameter     | Nilai   |
|---------------|---------|
| $s(0)$        | 0.7039  |
| $e(0)$        | 0.08126 |
| $i(0)$        | 0.21477 |
| $r(0)$        | 0       |
| $\lambda$     | 0.07    |
| $\mu$         | 0.07    |
| $\alpha$      | 0.9     |
| $\varepsilon$ | 0.2     |
| $\beta$       | 0.5     |

Gambar 2. Kurva subpopulasi untuk  $w = 0.8$ Gambar 3. Kurva subpopulasi untuk  $w = 0.55$ 

subpopulasi terinfeksi. Semakin tinggi tingkat keefektifan pengobatan pada fase terinfeksi TB mengakibatkan jumlah subpopulasi terinfeksi semakin menurun. Oleh karena itu model SEIR ini cukup baik untuk menggambarkan penyebaran penyakit TB.

### Daftar Pustaka

- [1] Brauer, F. dan C. Chavez, 2012, *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Springer, New York
- [2] Keeling, M.J. dan P. Rohani, 2008, *Modeling Infectious Diseases*. Princeton University Press, New Jersey
- [3] Li, Z., Z. Teng, X. Feng, Y. Li, dan H. Zhang, 2015, Dynamical Analysis of a SEIT Epidemic Model with Application to Ebola Virus Transmission in Guinea, *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, Article ID 582625, <http://dx.doi.org/10.1155/2015/582625>
- [4] Kelley, W. dan A.C. Peterson, 2010, *The Theory of Differential Equations*. Springer, New York

- [5] Martcheva, M., 2010, *An Introduction to Mathematical Epidemiology*, Springer, New York
- [6] Okuonghaea, D. dan A. Korobeinikov, 2007, Dynamics of Tuberculosis: The effect of Direct Observation Therapy Strategy (DOTS) in Nigeria, *Mathematical Modeling of Natural Phenomena* Vol. **2**(1): 3 – 11
- [7] Tanjung, R.W., Muhafzan, dan Zulakmal, 2021, Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis dengan Kontrol Vaksinasi, *Jurnal Matematika UNAND*, **10**(3): 280 – 287
- [8] Mettle, F. O., Affi, P. O. dan C. Twumasi, 2020, Modeling the transmission dynamics of tuberculosis in the Ashanti Region of Ghana, *Interdisciplinary Perspectives on Infectious Diseases*, ID 4513854, <https://doi.org/10.1155/2020/4513854>
- [9] Romanovsky, V. G, 2023, On some SEIRS epidemic models, *Journal of Nonlinear Modeling and Analysis* Vol. **5**(4), <https://doi.org/10.12150/jnma.2023.753>.
- [10] Das, K., Murthy, B. S. N, Samad, S. A, Biswas, M. H. A, 2021, Mathematical transmission analysis of SEIR tuberculosis disease model, *Sensors International* **2**(100120), <https://doi.org/10.1016/j.sintl.2021.100120>.
- [11] Piovella, N., 2020, Analytical solution of SEIR model describing the free spread of the COVID-19 pandemic, *Chaos, Solitons and Fractals* **140**(110243), <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.110243>.
- [12] Lynch, S., 2017, *Dynamical System with Application using MATLAB*, Birkhauser, Manchester
- [13] Pierre, T., 1994, *Dynamical System an Introduction with Applications in Economics and Biology*, Second Revised and Enlarged Edition, Springer-Verlag, Berlin
- [14] Fisher, S. 1990. *Complex Variables*, Second Edition, Dover Publications Inc., New York