

BILANGAN RAMSEY MULTIPARTIT HIMPUNAN UNTUK GRAF LINTASAN P_4 DAN GRAF RODA W_n DENGAN $n \geq 3$

NADYA CITRA MULTASYA*, MAHDHIVAN SYAFWAN, SYAFRIZAL SY

*Departemen Matematika dan Sains Data,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : nacit.multasya@gmail.com, mahdhivan@sci.unand.ac.id, syafrizalsy@sci.unand.ac.id*

Diterima 1 Juli 2022 Direvisi 20 Desember 2022 Dipublikasikan 21 Oktober 2023

Abstrak. Diberikan dua graf G dan H serta bilangan asli $j \geq 2$. Bilangan Ramsey Multipartit Himpunan (R-M-H) $M_j(G, H)$ adalah suatu bilangan bulat positif terkecil t sedemikian sehingga untuk sebarang faktorisasi $K_{(t \times j)} \cong F_1 \oplus F_2$ senantiasa mengakibatkan F_1 memuat subgraf G atau F_2 memuat subgraf H . Pada artikel ini akan ditentukan bilangan R-M-H $M_3(P_4, W_n)$, dimana P_4 adalah graf lintasan yang terdiri dari 4 titik dan W_n adalah graf roda yang terdiri dari $n + 1$ titi untuk $n \geq 3$.

Kata Kunci: Bilangan R-M-H, graf lintasan, graf roda

1. Pendahuluan

Teori Ramsey pertama kali diperkenalkan oleh Frank Plumpton Ramsey [1]. Ide dasar dari teori yang dikenal dengan teori Ramsey ini adalah bilangan Ramsey klasik. Jika diberikan dua bilangan asli m dan n , maka didefinisikan bilangan Ramsey $r(m, n)$ sebagai bilangan bulat positif terkecil p sedemikian sehingga jika graf lengkap K_p diberi 2-pewarnaan merah dan biru pada setiap sisinya, maka akan selalu terdapat graf lengkap K_m merah atau graf lengkap K_n biru sebagai subgraf dari K_p [2]. Hingga saat ini, baru ditemukan sembilan bilangan Ramsey klasik, yaitu $r(3, 3) = 6$, $r(3, 4) = 9$, $r(3, 5) = 14$, $r(3, 6) = 18$, $r(3, 7) = 23$, $r(3, 8) = 28$, $r(3, 9) = 36$, $r(4, 4) = 18$, dan $r(4, 5) = 25$ [3].

Kajian bilangan Ramsey diperluas untuk dua graf sebarang. Misalkan diberikan sebarang graf F dan H . Bilangan Ramsey $r(F, H)$ didefinisikan sebagai suatu bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga jika graf lengkap K_n diberi sebarang pewarnaan merah-biru pada setiap sisinya, maka graf lengkap K_n akan selalu memuat subgraf berwarna merah yang isomorfik dengan F atau subgraf berwarna biru yang isomorfik dengan H [4]. Bilangan Ramsey pun dikembangkan untuk kasus dua partit dan dinamakan bilangan Ramsey bipartit. Bilangan Ramsey bipartit kemudian diperumum menjadi bilangan Ramsey multipartit.

*penulis korespondensi

Pada awal abad ke-21, Burger dan Vuuren mengkaji bilangan Ramsey multipartit, yaitu tentang bilangan Ramsey multipartit himpunan (untuk selanjutnya dituliskan sebagai R-M-H) [5] dan bilangan Ramsey multipartit ukuran (untuk selanjutnya dituliskan sebagai R-M-U) [6]. Pada tahun 2020, Yuri [7] memperoleh bilangan R-M-H $M_2(P_n, W_s)$ untuk $n = 3$, $n = 4$, dan $s \geq 3$. Selanjutnya, Lubis [8] menentukan bilangan R-M-H untuk kombinasi graf lintasan P_3 dan graf roda W_n , untuk $n \geq 3$ dan $j = 4$. Pada artikel ini akan dibahas tentang bilangan R-M-H untuk kombinasi graf lintasan P_4 dan graf roda W_n untuk $n \geq 3$.

2. Landasan Teori

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah suatu himpunan tak kosong yang elemen-elemennya disebut titik dan $E(G)$ adalah suatu himpunan yang elemen-elemennya disebut sisi. Subgraf terinduksi $G[U]$ adalah suatu subgraf dari graf G sedemikian sehingga himpunan titiknya adalah $U \subseteq V(G)$, dan himpunan sisinya adalah himpunan semua sisi dari graf G yang mengaitkan dua titik di U [9]. Misalkan A , B , dan C adalah himpunan bagian dari $V(G)$. Notasi $A \setminus B$ menyatakan selisih himpunan A dan himpunan B , yaitu $A \setminus B = \{x \mid x \in A \cap x \notin B\}$. Notasi $A \cup B$ menyatakan gabungan himpunan A dan B , yaitu $A \cup B = \{x \mid x \in A \cup x \in B\}$. Notasi $G[A \setminus (B \cup C)]$ menyatakan subgraf terinduksi dari graf G yang himpunan titiknya terdiri dari $\{x \mid x \in A \cap x \notin (B \cup C)\}$.

Graf G dan H dikatakan isomorfik jika terdapat suatu fungsi bijektif $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ sedemikian sehingga titik u dan v bertetangga di G jika dan hanya jika $\phi(u)$ dan $\phi(v)$ bertetangga di H . Faktorisasi dari graf G adalah himpunan subgraf tak kosong $G_1, G_2, \dots, G_n$ sedemikian sehingga $V(G_i) = V(G_j)$ dan $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$ dan $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Faktorisasi dari graf G dinotasikan dengan $G \cong G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$. Siklus Hamilton adalah suatu lintasan tertutup yang semua titik dilewati tepat satu kali. Berikut beberapa teorema terkait siklus Hamilton yang akan digunakan pada artikel ini.

Teorema 2.1. [4] (*Teorema Dirac*) Misalkan G adalah graf dengan kardinalitas titik n dan $\delta(G)$ menyatakan derajat minimum di G . Jika $n \geq 3$ dan $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, maka G memuat siklus Hamilton.

Teorema 2.2. [4] (*Teorema Ore*) Misalkan G adalah graf dengan orde $n \geq 3$ dan $\sigma_2(G)$ menyatakan jumlah derajat minimum dari dua titik yang tidak bertetangga di G . Jika $\sigma_2(G) \geq n$, maka G memuat siklus Hamilton.

Graf lintasan adalah graf terhubung sederhana yang titiknya dapat disusun dalam suatu barisan sedemikian sehingga dua titiknya bertetangga jika kedua titik tersebut berurutan dalam barisan tersebut [10]. Graf lintasan P_n memiliki n titik dan $n-1$ sisi dengan $n \geq 1$ [4]. Graf lingkaran adalah graf terhubung sederhana yang semua titiknya berderajat 2. Graf roda merupakan suatu graf terhubung sederhana yang memuat graf lingkaran ditambah satu titik pusat yang bertetangga dengan semua titik pada graf lingkaran tersebut. Graf roda memiliki $n+1$ titik dan $2n$ sisi, dinotasikan dengan W_n , untuk $n \geq 3$. Graf multipartit adalah graf yang semua titiknya dapat dipartisi ke dalam k himpunan partit, dengan syarat setiap titik yang

berada di partit yang sama tidak bertetangga. Graf 2-partit disebut juga graf bipartit. Graf multipartit seimbang lengkap $K_{(t \times j)}$ adalah graf dimana setiap titiknya bertetangga dengan setiap titik pada partit lain, dan tidak bertetangga dengan titik pada partit yang sama. Pada graf multipartit lengkap, kardinalitas himpunan titik pada setiap himpunan partitnya sama, yaitu j . Graf bintang S_m adalah graf bipartit lengkap dimana kardinalitas titik salah satu partitnya sama dengan 1 (disebut juga titik pusat) dan m selainnya.

Teorema 2.3. [10] *Suatu graf G dikatakan bipartit jika dan hanya jika graf G tidak memuat siklus ganjil.*

Pada tahun 2004, Burger dan Vuuren mendefinisikan bilangan R-M-H sebagai berikut.

Definisi 2.4. [5] *Misalkan $K_{(\zeta \times j)}$ adalah suatu graf multipartit seimbang lengkap yang terdiri dari ζ himpunan partit dan j banyaknya titik pada setiap himpunan partit. Misalkan j, l, n, s , dan t adalah bilangan-bilangan bulat positif dengan $n, s \geq 2$. Bilangan R-M-H $M_j(K_{(n \times l)}, K_{(s \times t)})$ adalah bilangan bulat positif terkecil ζ sedemikian sehingga jika diberikan pewarnaan sebarang terhadap sisi-sisi $K_{(\zeta \times j)}$ menggunakan warna merah dan biru, maka $K_{(\zeta \times j)}$ memuat $K_{(n \times l)}$ merah atau $K_{(s \times t)}$ biru sebagai subgraf.*

Selanjutnya, Definisi 2.4 diperumum untuk kombinasi dua graf sebarang yang tidak harus lengkap dan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5. [5] *Diberikan dua graf G dan H , dan bilangan asli $j \geq 2$. Bilangan R-M-H $M_j(G, H)$ adalah bilangan bulat positif terkecil t sedemikian sehingga jika semua sisi dari graf multipartit seimbang lengkap $K_{(t \times j)}$ diberi sebarang pewarnaan merah-biru, maka graf $K_{(t \times j)}$ memuat subgraf G berwarna merah atau subgraf H berwarna biru.*

Definisi 2.5 ekuivalen dengan definisi berikut.

Definisi 2.6. [5] *Diberikan dua graf G dan H , dan bilangan asli $j \geq 2$. Bilangan R-M-H $M_j(G, H)$ adalah bilangan bulat positif terkecil t sedemikian sehingga untuk sebarang faktorisasi $K_{(t \times j)} \cong F_1 \oplus F_2$, maka senantiasa F_1 memuat subgraf G atau F_2 memuat subgraf H .*

3. Bilangan R-M-H untuk P_4 dan W_n dengan $n \geq 3$

Berdasarkan Definisi 2.6, bilangan R-M-H $M_3(P_4, W_n)$ didefinisikan sebagai suatu bilangan asli terkecil t sedemikian sehingga untuk sebarang faktorisasi $H = K_{(t \times 3)} \cong F \oplus G$, akan selalu terdapat F yang memuat P_4 atau G yang memuat W_n sebagai subgraf dari H . Artikel ini menggunakan istilah *hub* sebagai titik pusat dari graf roda W_n dan *pusat* sebagai titik pusat dari graf bintang S_m . Berikut disajikan teorema-teorema untuk menentukan bilangan R-M-H $M_3(P_4, W_n)$ untuk $n \geq 3$.

Teorema 3.1. *Misalkan terdapat graf lintasan P_4 dan graf roda W_n . Maka $M_3(P_4, W_n) = 4$ untuk $n \in \{4, 6\}$.*

Bukti. Pertama akan ditunjukkan $M_3(P_4, W_n) \geq 4$. Misalkan graf $F = K_{((4-1) \times 3)} \cong F_1 \oplus F_2$. Pilih $F_1 = 3C_3$. Jelas bahwa $F_1 \not\supseteq P_4$. Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, 3$ adalah himpunan partit di F . Pandang titik x yang berada di partit V_j sebagai *hub* di F_2 . Misalkan H adalah himpunan titik yang bertetangga dengan x di F_1 . Perhatikan bahwa $\Delta(F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]) \leq 1$, sehingga tidak mungkin subgraf terinduksi $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n . Akibatnya, $F_2 \not\supseteq W_n$ sebagai subgraf dari F . Oleh karena itu, haruslah $M_3(P_4, W_n) \geq 4$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $M_3(P_4, W_n) \leq 4$. Misalkan graf $G = K_{(4 \times 3)} \cong G_1 \oplus G_2$. Identifikasi semua kasus G_1 yang tidak memuat P_4 . Akan ditunjukkan G_2 memuat W_n . Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, 3, 4$ adalah himpunan partit di G . Berikut kasus-kasus untuk $G_1 \not\supseteq P_4$.

Kasus 1.A $G_1 = 4C_3$.

Jelas bahwa $G_1 \not\supseteq P_4$. Selanjutnya pandang suatu titik x pada partit V_j sebagai *hub* di G_2 . Misalkan H adalah himpunan titik yang bertetangga dengan x di G_1 . Berdasarkan Teorema 2.1, subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memiliki 7 titik, dan

$$\delta(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 4 > \frac{7}{2}$$

pasti memuat siklus Hamilton. Artinya, $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 7$. Karena terdapat titik x pada partit V_j sebagai *hub* dan subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ membentuk C_n , maka jelas bahwa $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G .

Kasus 1.B G_1 adalah hutan.

Misalkan G_1 adalah hutan yang komponen-komponennya berupa graf bintang, yaitu $n_i S_{m_i}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, 12$, dengan $0 \leq m_i \leq 9$, $n_i \geq 0$, dan $\sum_{i=1}^{12} n_i m_i = 12$. Jelas bahwa $G_1 \not\supseteq P_4$. Kasus ini dibagi menjadi dua subkasus sebagai berikut.

Subkasus 1.B.1 $G_1 = 3S_4$.

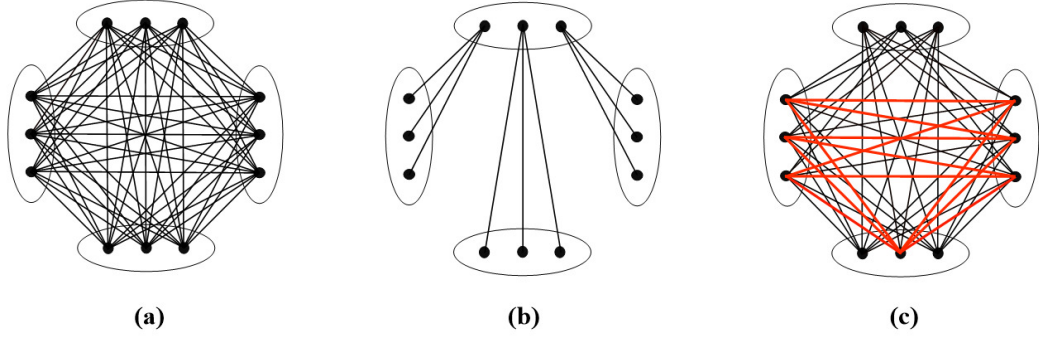
Misalkan setiap titik *pusat* berada di partit V_k dan setiap daun dari masing-masing graf bintang S_4 berada di suatu partit V_j dengan $j \neq k$.

Misalkan partit V_k memuat titik *pusat*. Perhatikan bahwa derajat setiap titik pada V_k lebih besar dibandingkan derajat titik pada $G_1 \setminus V_k$. Oleh karena itu, titik pada V_k tidak dapat dijadikan *hub* di G_2 dan *hub* harus berada di $G_2 \setminus V_k$. Pandang suatu titik x pada V_j sebagai *hub* di G_2 . Misalkan H adalah himpunan titik yang bertetangga dengan x di G_1 . Perhatikan bahwa $\delta(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 4$. Berdasarkan Teorema 2.2, subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memiliki 8 titik dan

$$\sigma_2(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 9 > 8$$

pasti memuat siklus Hamilton. Artinya $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 8$.

Perhatikan bahwa subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ isomorfik dengan graf bipartit $K_{(2 \times 4)}$. Berdasarkan Teorema 2.3, $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ tidak memuat siklus ganjil. Oleh karena itu, $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ hanya memuat C_n untuk $n \in \{4, 6, 8\}$. Karena terdapat titik x pada partit V_j sebagai *hub* dan subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ membentuk C_n , maka jelas bahwa $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G . Ilustrasi subkasus ini dapat dilihat pada Gambar 1 berikut.


 Gambar 1. (a) $G = K_{(4 \times 3)}$, (b) $G_1 = 3S_4 \not\subseteq P_4$, (c) $G_2 \supseteq W_n$
Subkasus 1.B.2 $G_1 \neq 3S_4$.

Misalkan setiap *pusat* berada di partit V_k dan setiap daun dari masing-masing graf bintang S_4 berada di suatu partit V_j dengan $j \neq k$.

Pilih titik x pada partit V_j yang terkait dengan *pusat* dari $\max\{S_{mi}\}$, sedemikian sehingga V_j merupakan partit dengan jumlah derajat ketiga titiknya maksimal di G_1 . Pandang titik x ini sebagai *hub* di G_2 . Misalkan H adalah himpunan titik yang bertetangga dengan x di G_1 . Perhatikan bahwa $\delta(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 4$. Berdasarkan Teorema 2.2, subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memiliki 8 titik dan

$$\sigma_2(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 9 > 8$$

pasti memuat siklus Hamilton. Artinya $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 8$. Karena terdapat titik x pada partit V_x sebagai *hub* dan subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ membentuk C_n , maka jelas bahwa $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G .

Dari Kasus 1.A, Subkasus 1.B.1, dan Subkasus 1.B.2, diperoleh $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G . Oleh karena itu, haruslah $M_3(P_4, W_n) \leq 4$.

Dengan demikian, diperoleh bahwa $M_3(P_4, W_n) = 4$ untuk $n \in \{4, 6\}$. $\square$

Teorema 3.2. Misalkan terdapat graf lintasan P_4 dan graf roda W_n . Maka $M_3(P_4, W_n) = 5$ untuk $n \in \{3, 5, 7, 8, 9, 10\}$.

Bukti. Pertama akan ditunjukkan $M_3(P_4, W_n) \geq 5$. Misalkan graf $F = K_{((5-1) \times 3)} \cong F_1 \oplus F_2$. Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, 3, 4$ adalah himpunan partit di F . Berikut beberapa kasus untuk $F_1 \not\subseteq P_4$.

Kasus 2.A $F_1 = 4C_3$.

Jelas bahwa $F_1 \not\subseteq P_4$. Selanjutnya pandang suatu titik x pada partit V_j sebagai *hub* di F_2 . Misalkan H adalah himpunan titik yang bertetangga dengan x di F_1 . Berdasarkan Teorema 2.1, subgraf terinduksi $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ memiliki 7 titik

dan

$$\delta(F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 4 > \frac{7}{2}$$

pasti memuat siklus Hamilton. Artinya $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 7$ dan tidak memuat C_n untuk $n > 7$. Akibatnya $F_2 \not\supseteq W_n$.

Kasus 2.B $F_1 = 3S_4$.

Misalkan setiap titik *pusat* berada di partit V_k dan setiap daun dari masing-masing graf bintang S_4 berada di suatu partit V_j dengan $j \neq k$.

Jelas bahwa $F_1 \not\supseteq P_4$. Selanjutnya perhatikan bahwa derajat setiap titik pada V_k lebih besar dibandingkan derajat titik pada $F_1 \setminus V_k$. Oleh karena itu, titik pada V_k tidak dapat dijadikan *hub* di F_2 dan *hub* harus berada di $F_2 \setminus V_k$. Pandang suatu titik x pada V_j sebagai *hub* di F_2 . Misalkan H adalah himpunan titik yang bertetangga dengan x di F_1 . Perhatikan bahwa $\delta(F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 4$. Berdasarkan Teorema 2.2, subgraf terinduksi $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ memiliki 8 titik dan

$$\sigma_2(F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 9 > 8$$

pasti memuat siklus Hamilton. Artinya $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 8$. Perhatikan subgraf terinduksi $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ isomorfik dengan graf bipartit $K_{(2 \times 4)}$. Menurut Teorema 2.3, $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ tidak memuat siklus ganjil. Oleh karena itu, graf $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ hanya memuat C_n untuk $n \in \{4, 6, 8\}$ dan tidak memuat C_n untuk $n \in \{3, 5, 7\}$. Akibatnya $F_2 \not\supseteq W_n$.

Dari Kasus 2.A dan Kasus 2.B, diperoleh $F_2 \not\supseteq W_n$ sebagai subgraf dari F . Oleh karena itu, haruslah $M_3(P_4, W_n) \geq 5$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $M_3(P_4, W_n) \leq 5$. Misalkan graf $G = K_{(5 \times 3)} \cong G_1 \oplus G_2$. Identifikasi semua kasus G_1 yang tidak memuat P_4 . Akan ditunjukkan G_2 memuat W_n . Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, 3, 4, 5$ adalah himpunan partit di G . Berikut kasus-kasus untuk $G_1 \not\supseteq P_4$.

Kasus 2.C $G_1 = 5C_3$.

Jelas bahwa $G_1 \not\supseteq P_4$. Selanjutnya pandang suatu titik x pada partit V_j sebagai *hub* di G_2 . Misalkan H adalah himpunan titik yang bertetangga dengan x di G_1 . Berdasarkan Teorema 2.1, subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memiliki 10 titik dan

$$\delta(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 7 > \frac{10}{2}$$

pasti memuat siklus Hamilton. Artinya $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 10$. Karena terdapat titik x pada partit V_j sebagai *hub* dan subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ membentuk C_n , maka jelas bahwa $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G .

Kasus 2.D Graf G_1 adalah graf hutan dengan komponen-komponennya berupa graf bintang $n_i S_{m_i}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, 15$ dengan $0 \leq m_i \leq 12$, $n_i \geq 0$, dan $\sum_{i=1}^{15} n_i m_i = 15$.

Jelas bahwa $G_1 \not\supseteq P_4$. Selanjutnya pilih titik x pada partit V_j yang terkait dengan titik *pusat* dari $\max\{S_{m_i}\}$ sedemikian sehingga V_j merupakan partit dengan jumlah derajat ketiga titiknya maksimal di G_1 . Pandang titik x ini sebagai *hub* di G_2 . Misalkan H adalah himpunan titik yang bertetangga dengan x di G_1 . Perhatikan

bahwa $\delta(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 5$. Berdasarkan Teorema 2.2, subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memiliki 11 titik dan

$$\sigma_2(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 11 = 11$$

pasti memuat siklus Hamilton. Artinya $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 11$. Karena terdapat titik x pada partit V_j sebagai *hub* dan subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ membentuk C_n , maka jelas bahwa $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G .

Dari Kasus 2.C dan Kasus 2.D, diperoleh $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G . Oleh karena itu, haruslah $M_3(P_4, W_n) \leq 5$.

Dengan demikian, diperoleh bahwa $M_3(P_4, W_n) = 5$ untuk $n \in \{3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ $\square$

Pada Teorema 3.3 diberikan bilangan R-M-H untuk graf lintasan P_4 dan graf roda W_n dengan $n \geq 11$.

Teorema 3.3. *Misalkan terdapat graf lintasan P_4 dan graf roda W_n . Maka $M_3(P_4, W_n) = \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 11$.*

Bukti. Pertama akan ditunjukkan bahwa $M_3(P_4, W_n) \geq \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$. Misalkan graf $F = K_{(\lceil \frac{n+5}{3} \rceil - 1) \times 3} \cong F_1 \oplus F_2$. Pilih $F_1 = \left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1 \right) C_3$. Jelas bahwa $F_1 \not\supseteq P_4$. Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3} \mid 1 \leq i \leq \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\}$ adalah himpunan partit di F . Pandang suatu titik x pada partit V_j sebagai *hub* di F_2 . Misalkan H adalah himpunan titik yang bertetangga dengan x di F_1 . Berdasarkan Teorema 2.1, subgraf terinduksi $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ memiliki $3\left(\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right) - 1\right)$ titik, dan

$$\delta(F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 3\left(\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right) - 1\right) - 2 \geq \frac{3\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right) - 1}{2}$$

pasti memuat siklus Hamilton. Artinya $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n dengan $n \leq 3\left(\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right) - 1\right) - 2$. Perhatikan bahwa untuk membentuk C_n dibutuhkan minimal n titik, sedangkan pada $F_2[V(F) \setminus (V_j \cup H)]$ terdapat $3\left(\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right) - 1\right) - 2 < n$ titik untuk $n \geq 11$. Akibatnya $F_2 \not\supseteq W_n$ sebagai subgraf dari F . Oleh karena itu, haruslah $M_3(P_4, W_n) \geq \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan $M_3(P_4, W_n) \leq \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$. Misalkan graf $G = K_{(\lceil \frac{n+5}{3} \rceil \times 3)} \cong G_1 \oplus G_2$. Identifikasi semua kasus G_1 yang tidak memuat P_4 . Akan ditunjukkan G_2 memuat W_n . Misalkan $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, v_{i,3}\}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$ adalah himpunan partit di G . Berikut kasus-kasus untuk $G_1 \not\supseteq P_4$.

Kasus 3.A $G_1 = \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil C_3$.

Jelas bahwa $G_1 \not\supseteq P_4$. Selanjutnya pandang suatu titik x pada partit V_j sebagai

hub di G_2 . Misalkan H adalah himpunan titik yang bertetangga dengan x di G_1 . Berdasarkan Teorema 2.1, subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ dengan $n \geq 11$ yang memiliki $3\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right)$ titik, dan

$$\delta(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 3\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right) - 2 \geq \frac{3\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right)}{2}$$

pasti memuat siklus Hamilton. Artinya $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n . Karena terdapat titik x pada partit V_j sebagai *hub* dan subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ membentuk C_n , maka jelas bahwa $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G .

Kasus 3.B G_1 adalah hutan.

Misalkan G_1 adalah graf dengan komponen-komponennya graf bintang $n_i S_{m_i}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$, dengan $0 \leq m_i \leq 3\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right)$, $n_i \geq 0$, dan $\sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil} n_i m_i = 3\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$. Jelas bahwa $G_1 \not\supseteq P_4$.

Selanjutnya pilih titik x pada partit V_j yang terkait dengan *pusat* dari $\max\{S_{m_i}\}$, sedemikian sehingga V_j merupakan partit dengan jumlah derajat ketiga titiknya maksimal di G_1 . Pandang titik x ini sebagai *hub* di G_2 . Misalkan H adalah himpunan titik yang bertetangga dengan x di G_1 . Perhatikan bahwa $\delta(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$. Berdasarkan Teorema 2.2, subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ dengan $n \geq 11$, memiliki $3\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right)$ titik, dan

$$\sigma_2(G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]) \geq 2\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil + 1 \geq 3\left(\left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil - 1\right)$$

pasti memuat siklus Hamilton. Artinya $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ memuat C_n . Karena terdapat titik x pada partit V_j sebagai *hub* dan subgraf terinduksi $G_2[V(G) \setminus (V_j \cup H)]$ membentuk C_n , maka jelas bahwa $G_2 \supseteq W_n$ sebagai subgraf dari G .

Dari Kasus 3.A dan Kasus 3.B, diperoleh $G_2 \supseteq W_n$. Oleh karena itu, haruslah $M_3(P_4, W_n) \leq \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$.

Dengan demikian, diperoleh bahwa $M_3(P_4, W_n) = \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil$ untuk $n \geq 11$. $\square$

4. Kesimpulan

Pada artikel ini diperoleh bilangan Ramsey Multipartit Himpunan $M_3(P_4, W_n)$ untuk graf lintasan P_4 dan graf roda W_n , $n \geq 3$ sebagai berikut.

$$M_3(P_4, W_n) = \begin{cases} 4 & , n \in \{4, 6\}, \\ 5 & , n \in \{3, 5, 7, 8, 9, 10\}, \\ \left\lceil \frac{n+5}{3} \right\rceil & , n \geq 11. \end{cases}$$

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada bapak Narwen, ibu Radhiatul Husna, bapak Admi Nazra, serta tim Jurnal Matematika UNAND yang telah memberikan saran dan masukan sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Ramsey, A.P., 1928, On a problem of formal logic, *Proceedings of The London Mathematical Society* Vol. **30**: 264 – 286
- [2] Clark, J. dan Holton, D.A., 1995, *A First Look at Graph Theory*, Allied Publishers LTD, Singapura
- [3] Radziszowski, S.P., 2021, Small Ramsey numbers, *The Electronic Journal of Combinatorics* DS1. #16
- [4] Chartrand, G., Lesniak, L, dan Zhang, P., 2016, *Graphs and Digraphs*, Sixth Edition, CRC Press, Boca Rotan
- [5] Burger, A.P. dan Vuuren, J.H Van, 2004, Ramsey numbers in complete balance multipartite graphs, Part I: Set numbers, *Discrete Mathematics* Vol. **283**: 37 – 43
- [6] Burger, A.P. dan Vuuren, J.H Van, 2004, Ramsey numbers in complete balance multipartite graphs, Part II: Size numbers, *Discrete Mathematics* Vol. **283**: 45 – 49
- [7] Yuri, R., 2020, Bilangan Ramsey Multipartit Himpunan untuk Kombinasi Graf Lintasan dengan Roda, *Tesis S-2*, tidak diterbitkan, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas
- [8] Lubis, A. A., 2021, Bilangan Ramsey Multipartit Himpunan untuk Kombinasi Graf Lintasan dengan Graf Roda $M_4(P_3, W_n)$ dengan $n \geq 3$. *Skripsi S-1*, tidak diterbitkan, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas
- [9] Wallis, W.D., 2007, *A Beginner's Guide to Graph Theory*, Second Edition, Birkhauser, Carbondale
- [10] Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R., 2008, *Graph Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York