BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* DAN *STRONG RAINBOW CONNECTION* GRAF JAHANGIR $J_{2,m}$ UNTUK $2 \leq m \leq 8$

Muhammad Randa, Des Welyyanti, Lyra Yulianti

Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
muhammadranda1411@gmail.com, deswelyyanti@gmail.com, lyrayulianti@gmail.com

Abstrak. Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial dan didefinisikan pewarnaan sisi pada graf G, yaitu $p : E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., n\}; n \in \mathbb{N}$, dimana sisi yang bertetangga boleh bewarna sama. Graf G dikatakan *rainbow connected* terhadap pewarnaan sisi p, jika G memuat lintasan-(u, v) *rainbow* untuk setiap dua titik u dan v di G. Bilangan *rainbow connection* adalah minimal warna yang diperlukan sehingga graf G *rainbow connected*, dinotasikan $rc(G)$. Graf G dikatakan *strongly rainbow connected* jika G memuat suatu lintasan-(u, v) *geodesic* untuk setiap lintasan pada dua titik u dan v di G. Bilangan *strongly rainbow connection* adalah minimal warna yang diperlukan sehingga graf G *strong rainbow connected*, dinotasikan $src(G)$. Graf Jahangir $J_{n,m}$ dengan $n, m \geq 2$ adalah suatu graf dengan $nm + 1$ titik, yang terdiri dari lingkaran C_{nm} dengan menambahkan satu titik pusat c yang bertetangga ke m titik dari C_{nm} yaitu $u_1, u_2, u_3, ..., u_m$, sedemikian sehingga $d(u_i, u_{i+1}) = d(u_m, u_1) = n$, $1 \leq i \leq m - 1$ di C_{nm}. Pada tulisan ini diperoleh $rc(J_{2,m})$ dan $src(J_{2,m})$ untuk $2 \leq m \leq 8$.

Kata Kunci *: Bilangan rainbow connection, bilangan strong rainbow connection, graf Jahangir*

1. Pendahuluan

Konsep dari *rainbow connection* diperkenalkan oleh Chartrand dkk [3]. Misalkan G merupakan suatu graf terhubung tak trivial. Didefinisikan suatu pewarnaan sisi pada graf G adalah suatu pemetaan $p : E(G) \rightarrow \{1, 2, ..., n\}; n \in \mathbb{N}$, dimana sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Suatu lintasan-(u, v) dikatakan sebagai lintasan *rainbow* untuk dua titik $u, v \in G$ jika tidak terdapat dua sisi pada lintasan tersebut yang berwarna sama. Suatu graf G dikatakan *rainbow connected* terhadap pewarnaan sisi p, jika G memuat lintasan-(u, v) *rainbow* untuk setiap dua titik u dan v pada G. Jika graf G bersifat *rainbow connected*, maka pewarnaan sisinya dinamakan *rainbow coloring* pada G. Bilangan *rainbow connection* adalah minimal warna yang diperlukan sehingga graf G *rainbow connected*, dinotasikan $rc(G)$.

Konsep tentang *strong rainbow connection* diperkenalkan oleh Li dan Sun [4]. Misalkan p adalah *rainbow coloring* dari graf terhubung G. Setiap lintasan yang menghubungkan dua titik u dan v di G didefinisikan sebagai suatu lintasan-(u, v) *geodesic* jika memuat lintasan-(u, v) *rainbow* dengan panjang $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara titik u dan v. Suatu graf G dikatakan *strongly rainbow connected* jika G memuat suatu lintasan-(u, v) *geodesic* untuk setiap lintasan pada dua titik u dan v di G. Pewarnaan sisi p dinamakan *strong rainbow coloring* dari graf terhubung G. Bilangan *strong rainbow connection*, dinotasikan $src(G)$, didefinisikan sebagai minimal dari banyaknya warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G bersifat *strongly rainbow connected.* Teorema berikut digunakan dalam penentuan bilangan *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* untuk suatu graf G.

Teorema 1. [3] *Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial berukuran m dan $diam(G) = max\{d(u, v)|u, v \in V(G)\}$ maka,*

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m. \tag{1.1}$$

Teorema 2. [3] *Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial, maka*

1. *$rc(G) = src(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap.*
2. *$rc(G) = 2$ jika dan hanya jika $src(G) = 2$.*
3. *$rc(G) = m$ jika dan hanya jika G adalah graf pohon berukuran m.*
4. *Untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 4$, $rc(G) = src(G) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ jika G adalah graf lingkaran C_n.*

Perkembangan penentuan bilangan *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* untuk graf-graf khusus semakin bertambah. Sy dkk [7] telah mengkaji *rainbow connection* untuk graf kipas dan graf matahari. Yulianti dkk [8] telah mengkaji bilangan *rainbow connection* pada graf *Triangle-net.* Pada tahun 2018, Asmara dkk [1] mengkaji tentang bilangan *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* pada graf Jahangir $J_{2,m}$ untuk $2 \leq m \leq 8$. Pada tulisan ini diberikan perbaikan batas atas dari bilangan *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* graf Jahangir $J_{2,m}$ untuk $2 \leq m \leq 8$ yang diperoleh Asmara [1].

2. Graf Jahangir

Graf Jahangir $J_{n,m}$ dengan $n, m \geq 2$ adalah suatu graf dengan $nm + 1$ titik, yang terdiri dari lingkaran C_{nm} dengan menambahkan satu titik pusat c yang bertetangga ke m titik dari C_{nm} yaitu $u_1, u_2, u_3, ..., u_m$, sedemikian sehingga $d(u_i, u_{i+1}) = d(u_m, u_1) = n$, $1 \leq i \leq m - 1$ di C_{nm} [5].

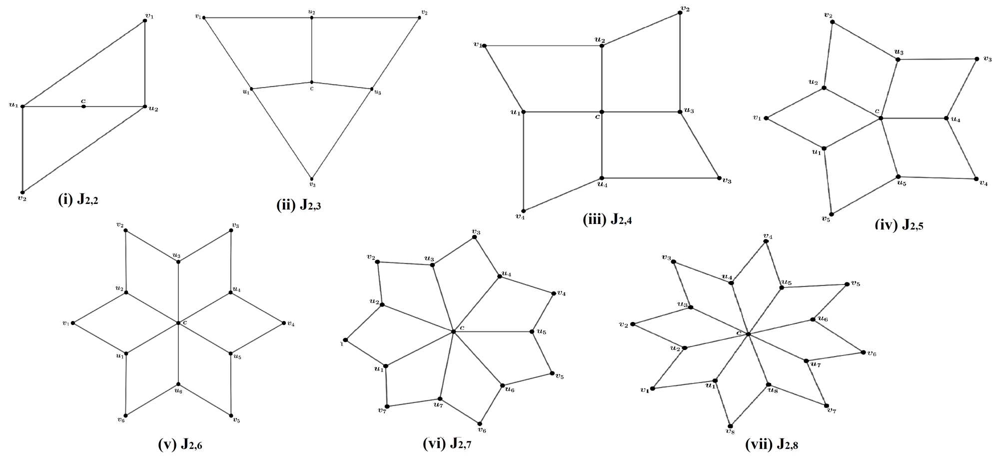
Misalkan untuk $n = 2$ dan $m \geq 2$, diperoleh graf Jahangir $J_{2,m}$ dengan $V(J_{2,m}) = \{c, u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_m\}$ dan $E(J_{2,m}) = \{cu_i|1 \leq i \leq m\} \cup \{u_1v_m, u_mv_m, u_iv_i, u_{i+1}v_i|1 \leq i \leq m - 1\}$. Beberapa contoh graf Jahangir $J_{2,m}$ untuk $2 \leq m \leq 8$ dapat dilihat pada Gambar 1.

3. Bilangan *Rainbow Connection* dan *Strong Rainbow Connection* pada Graf Jahangir $J_{2,m}$ untuk $2 \leq m \leq 8$

3.1. *Bilangan Rainbow Connection Graf Jahangir $J_{2,m}$ untuk $2 \leq m \leq 8$*

Pada Teorema 3 membahas tentang bilangan *rainbow connection* dari graf Jahangir $J_{2,m}$ untuk $2 \leq m \leq 8$.

Teorema 3. *Misalkan terdapat graf Jahangir $J_{2,m}$. Jika $2 \leq m \leq 8$, maka bilangan rainbow connection $J_{2,m}$ adalah*



Gambar 1. Graf Jahangir $J_{2,m}$ dengan $2 \leq m \leq 8$

$$rc(J_{2,m}) = \begin{cases} 2, \text{ untuk } m = 2; \\ 3, \text{ untuk } m = 3; \\ 4, \text{ untuk } 4 \leq m \leq 8. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan $J_{2,m}$ merupakan suatu graf Jahangir yang telah dijelaskan di atas. Berdasarkan Teorema 1, diperoleh bahwa $diam(J_{2,m}) \leq rc(J_{2,m})$.

Perhatikan tiga kasus berikut.

Kasus 1. Untuk $m = 2$.

Misalkan graf Jahangir $J_{2,2}$ dengan $V(J_{2,2}) = \{c, u_1, u_2, v_1, v_2\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut.

$$p_1(e) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } e = cu_1, u_1v_1, u_2v_1; \\ 2 \text{ untuk } e = cu_2, u_1v_2, u_2v_2. \end{cases}$$

Graf $J_{2,2}$ mempunyai $diam(J_{2,2}) = 2$, maka diperoleh $rc(J_{2,2}) \geq 2$. Jelas bahwa dengan $p_1 : E(J_{2,2}) \to \{1, 2\}$, untuk setiap dua titik a dan b di $J_{2,2}$, selalu terdapat lintasan-(a, b) *rainbow*, sehingga diperoleh bahwa $rc(J_{2,2}) \leq 2$. Dengan demikian, terbukti bahwa $rc(J_{2,2}) = 2$.

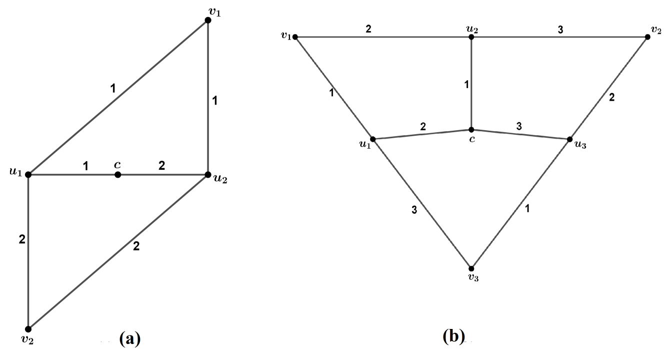
Kasus 2. Untuk $m = 3$.

Misalkan graf Jahangir $J_{2,3}$ dengan $V(J_{2,3}) = \{c, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut.

$$p_2(e) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } e = cu_2, u_1v_1, u_3v_3; \\ 2 \text{ untuk } e = cu_1, u_2v_1, u_3v_2; \\ 3 \text{ untuk } e = cu_3, u_1v_3, u_2v_2. \end{cases}$$

Graf $J_{2,3}$ mempunyai $diam(J_{2,3}) = 3$, maka diperoleh $rc(J_{2,3}) \geq 3$. Jelas bahwa dengan $p_2 : E(J_{2,3}) \rightarrow \{1, 2, 3\}$, untuk setiap dua titik a dan b di $J_{2,3}$, selalu terdapat lintasan-(a, b) *rainbow*, sehingga diperoleh $rc(J_{2,3}) \leq 3$. Dengan demikian, terbukti bahwa $rc(J_{2,3}) = 3$.

Ilustrasi *rainbow connection* untuk graf $J_{2,2}$ dan $J_{2,3}$ dapat dilihat pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. (a) $rc(J_{2,2}) = 2$ dan (b) $rc(J_{2,3}) = 3$

Kasus 3. Untuk $4 \leq m \leq 8$.

Untuk $4 \leq m \leq 8$ $diam(J_{2,m}) = 4$, maka diperoleh $rc(J_{2,m}) \geq 4$. Selanjutnya pandang kasus ini menjadi dua bagian.

(a) Jika m ganjil.

Misalkan graf $J_{2,m}$ dengan $V(J_{2,m}) = \{c, u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_m\}$, untuk $4 \leq m \leq 8$ dan m ganjil. Definisikan pewarnaan sisi graf $J_{2,m}$ dengan $1 \leq i \leq \frac{m-1}{2}, i \in \mathbb{N}$ sebagai berikut.

$$p_3(e) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } e = cu_{2i-1}; \\ 2 \text{ untuk } e = u_m v_m, cu_{2i}; \\ 3 \text{ untuk } e = v_m u_1, u_{2i-1}v_{2i-1}, v_{2i}u_{2i+1}; \\ 4 \text{ untuk } e = cu_m, v_{2i-1}u_{2i}, u_{2i}v_{2i}. \end{cases}$$

Jelas bahwa dengan $p_3 : E(J_{2,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ untuk setiap dua titik a dan b di $J_{2,m}$ dengan $4 \leq m \leq 8$ dan m ganjil, selalu terdapat lintasan-(a, b) *rainbow*. Akibatnya, diperoleh bahwa $rc(J_{2,m}) \leq 4$. Dengan demikian, terbukti untuk $4 \leq m \leq 8$ dengan m ganjil, $rc(J_{2,m}) = 4$.

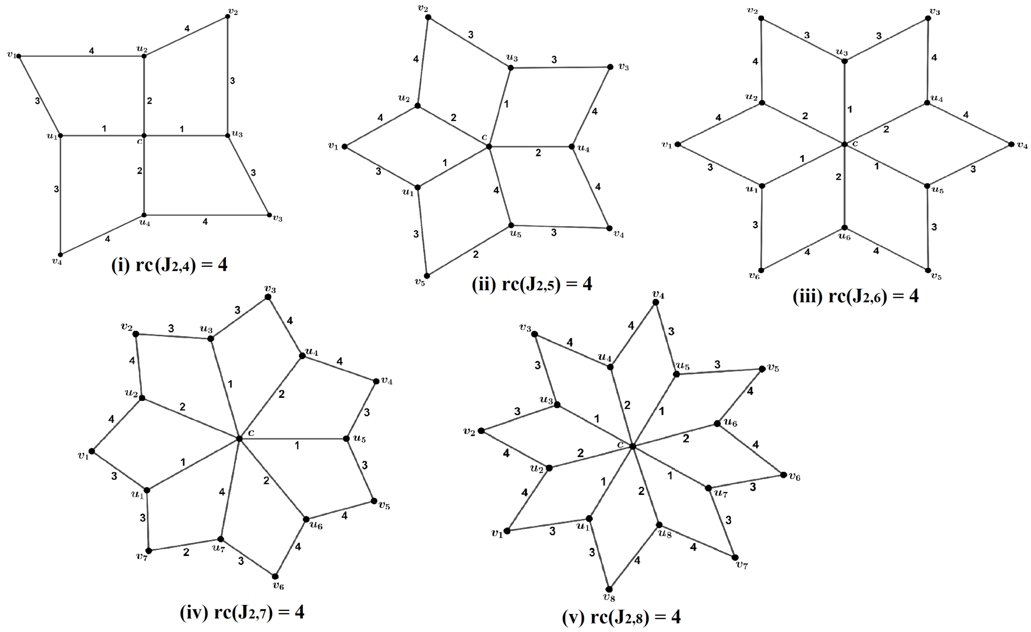
(b) Jika m genap.

Misalkan graf Jahangir $J_{2,m}$ dengan $V(J_{2,m}) = \{c, u_1, u_2, ..., u_m, v_1, v_2, ..., v_m\}$, untuk $4 \leq m \leq 8$ dan m genap. Definisikan pewarnaan sisi $J_{2,m}$ sebagai berikut.

$$p_4(e) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } e = cu_{2i-1} \text{ dengan } 1 \leq i \leq \frac{m}{2}; \\ 2 \text{ untuk } e = cu_{2i} \text{ dengan } 1 \leq i \leq \frac{m}{2}; \\ 3 \text{ untuk } e = v_m u_1, u_{m-1}v_{m-1}, u_{2i-1}v_{2i-1}, v_{2i}u_{2i+1} \text{ dengan } 1 \leq i \leq \frac{m-2}{2}; \\ 4 \text{ untuk } e = v_{2i-1}u_{2i}, u_{2i}v_{2i} \text{ dengan } 1 \leq i \leq \frac{m}{2}. \end{cases}$$

Jelas bahwa dengan $p_4 : E(J_{2,m}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, untuk setiap dua titik a dan b di $J_{2,m}$ dengan $4 \leq m \leq 8$ dan m genap, selalu terdapat lintasan-(a, b) *rainbow* sehingga diperoleh $rc(J_{2,m}) \leq 4$. Dengan demikian, terbukti bahwa untuk $4 \leq m \leq 8$ dan m genap, $rc(J_{2,m}) = 4$.

Dari hasil (a) dan (b), dapat disimpulkan bahwa untuk $4 \leq m \leq 8$ diperoleh $rc(J_{2,m}) = 4$. Ilustrasi *rainbow connection* untuk graf $J_{2,m}$ untuk $4 \leq m \leq 8$ dapat dilihat pada Gambar 3 berikut.



Gambar 3. $rc(J_{2,m}) = 4$ untuk $4 \leq m \leq 8$

□

3.2. *Bilangan* Strong Rainbow Connection *Graf Jahangir* $J_{2,m}$ *untuk* $m \geq 2$

Pada Teorema 4 membahas tentang bilangan *Strong Rainbow Connection* dari graf Jahangir $J_{2,m}$ untuk $2 \leq m \leq 8$.

Teorema 4. *Misalkan terdapat graf Jahangir* $J_{2,m}$. *Jika* $2 \leq m \leq 8$, *maka bilangan* *strong rainbow connection* $J_{2,m}$ *adalah*

$$src(J_{2,m}) = \begin{cases} 2, \text{ untuk } m = 2; \\ 3, \text{ untuk } m = 3; \\ 4, \text{ untuk } 4 \leq m \leq 6; \\ 5, \text{ untuk } 7 \leq m \leq 8. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan $J_{2,m}$ merupakan suatu graf Jahangir yang telah dijelaskan di atas. Berdasarkan Teorema 1, diperoleh bahwa $src(J_{2,m}) \geq rc(J_{2,m})$.

Perhatikan empat kasus berikut.

Kasus 1. Untuk $m = 2$.

Misalkan graf $J_{2,2}$ dengan $V(J_{2,2}) = \{c, u_1, u_2, v_1, v_2\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut.

$$p_7(e) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } e = cu_2, u_1v_1, u_2v_1; \\ 2 \text{ untuk } e = cu_1, u_1v_2, u_2v_2. \end{cases}$$

Jelas bahwa dengan $p_7 : E(J_{2,2}) \to \{1, 2\}$, untuk setiap dua titik a dan b di $J_{2,2}$, selalu terdapat lintasan-(a, b) *geodesic* sehingga diperoleh $src(J_{2,2}) \leq 2$. Dari Bagian 3.1 Kasus 1, diperoleh bahwa $rc(J_{2,2}) = 2$, maka diperoleh bahwa $src(J_{2,2}) \geq 2$. Dengan demikian, terbukti bahwa $src(J_{2,2}) = 2$.

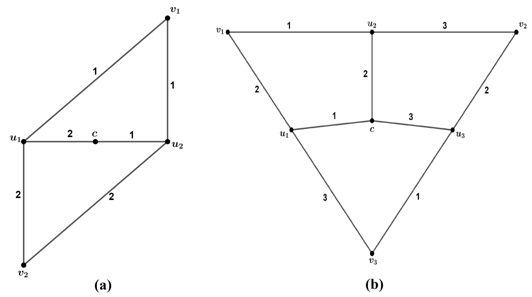
Kasus 2. Untuk $m = 3$.

Misalkan graf $J_{2,3}$ dengan $V(J_{2,3}) = \{c, u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut.

$$p_8(e) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } e = cu_1, u_2v_1, u_3v_3; \\ 2 \text{ untuk } e = cu_2, u_1v_1, u_3v_2; \\ 3 \text{ untuk } e = cu_3, u_1v_3, u_2v_2. \end{cases}$$

Jelas bahwa dengan $p_8 : E(J_{2,3}) \to \{1, 2, 3\}$, untuk setiap dua titik a dan b di $J_{2,3}$, selalu terdapat lintasan-(u, v) *geodesic*, sehingga diperoleh $src(J_{2,3}) \leq 3$. Dari Bagian 3.1 Kasus 2, diperoleh bahwa $rc(J_{2,3}) = 3$, maka diperoleh bahwa $src(J_{2,3}) \geq 3$. Dengan demikian, terbukti bahwa $src(J_{2,3}) = 3$.

Ilustrasi *strong rainbow connection* untuk graf $J_{2,2}$ dan $J_{2,3}$ dapat dilihat pada Gambar 4 berikut.



Gambar 4. (a) $src(J_{2,2}) = 2$ dan (b) $src(J_{2,3}) = 3$

Dari Bagian 3.1 Kasus 3 untuk $4 \leq m \leq 8$ diperoleh bahwa $rc(J_{2,m}) = 4$, maka berdasarkan Teorema 1 diperoleh $src(J_{2,m}) \geq 4$ untuk $4 \leq m \leq 8$. Ini akan digunakan untuk pembuktian kasus berikutnya.

Kasus 3. Untuk $4 \leq m \leq 6$.

Pandang kasus ini menjadi beberapa bagian.
(a) $m = 4$

Misalkan graf $J_{2,4}$ dengan $V(J_{2,4}) = \{c, u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut.

$$p_9(e) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } e = cu_1, u_2v_1, u_4v_4; \\ 2 \text{ untuk } e = cu_2, u_1v_1, u_3v_2; \\ 3 \text{ untuk } e = cu_3, u_2v_2, u_4v_3; \\ 4 \text{ untuk } e = cu_4, u_3v_3, u_1v_4. \end{cases}$$

Jelas bahwa dengan $p_9 : E(J_{2,4}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, untuk setiap dua titik a dan b di $J_{2,4}$, selalu terdapat lintasan-(a, b) *geodesic*. Jadi, diperoleh $src(J_{2,4}) \leq 4$. Dengan demikian, terbukti bahwa $src(J_{2,4}) = 4$.
(b) $m = 5$

Misalkan graf $J_{2,5}$ dengan $V(J_{2,5}) = \{c, u_1, u_2, ..., u_5, v_1, v_2, ..., v_5\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut.

$$p_{10}(e) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } e = cu_1, cu_2, u_1v_1, u_3v_3, u_4v_4; \\ 2 \text{ untuk } e = cu_3, u_2v_1, u_4v_3, u_5v_4; \\ 3 \text{ untuk } e = cu_4, u_2v_2, u_5v_5; \\ 4 \text{ untuk } e = cu_5, u_3v_2, u_1v_5. \end{cases}$$

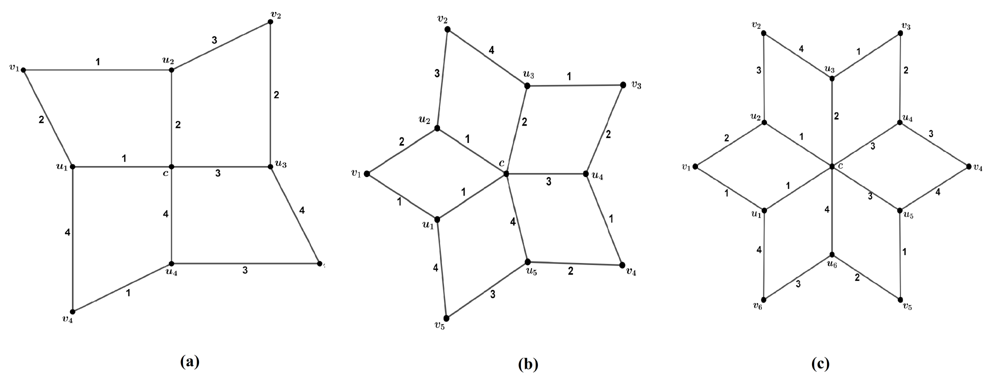
Jelas bahwa dengan $p_{10} : E(J_{2,5}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$, untuk setiap dua titik a dan b di $J_{2,5}$, selalu terdapat lintasan-(a, b) *geodesic* sehingga diperoleh $src(J_{2,5}) \leq 4$. Dengan demikian, terbukti bahwa $src(J_{2,5}) = 4$.
(c) $m = 6$

Misalkan graf $J_{2,6}$ dengan $V(J_{2,6}) = \{c, u_1, u_2, ..., u_6, v_1, v_2, ..., v_6\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut.

$$p_{11}(e) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } e = cu_1, cu_2, u_1v_1, u_3v_3, u_5v_5; \\ 2 \text{ untuk } e = cu_3, u_2v_1, u_4v_3, u_6v_5; \\ 3 \text{ untuk } e = cu_4, cu_5, u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6; \\ 4 \text{ untuk } e = cu_6, u_3v_2, u_5v_4, u_1v_6. \end{cases}$$

Jelas bahwa dengan $p_{11} : E(J_{2,6}) \to \{1, 2, 3, 4\}$, untuk setiap dua titik a dan b di $J_{2,6}$, selalu terdapat lintasan-(a, b) *geodesic* sehingga diperoleh $src(J_{2,6}) \leq 4$. Dengan demikian, terbukti bahwa $src(J_{2,6}) = 4$.

Jadi, bilangan *strong rainbow connection* graf Jahangir $J_{2,m}$ untuk $4 \leq m \leq 6$ adalah $src(J_{2,m}) = 4$. Ilustrasi *strong rainbow connection* untuk graf $J_{2,4}$, $J_{2,5}$ dan $J_{2,6}$ dapat dilihat pada Gambar 5 berikut.



Gambar 5. (a) $src(J_{2,4}) = 4$, (b) $src(J_{2,5}) = 4$ dan (c) $src(J_{2,6}) = 4$

Kasus 4. Untuk $7 \leq m \leq 8$.

Pandang kasus ini menjadi dua bagian.
(a) $m = 7$

Diketahui sebelumnya bahwa $src(J_{2,7}) \geq 4$. Jika pada graf Jahangir $J_{2,7}$ diberikan 4-warna, tanpa mengurangi perumuman akan terdapat dua titik a dan b di $J_{2,7}$ yang tidak ada lintasan-(a, b) *geodesic*. Akibatnya, diperoleh bahwa $scr(J_{2,7}) \geq 5$. Misalkan graf Jahangir $J_{2,7}$ dengan $V(J_{2,7}) = \{c, u_1, u_2, ..., u_7, v_1, v_2, ..., v_7\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut.

$$p_{12}(e) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } e = cu_2, u_1v_1, u_4v_3, u_6v_6; \\ 2 \text{ untuk } e = cu_1, u_2v_1, u_4v_4, u_7v_6; \\ 3 \text{ untuk } e = cu_3, cu_4, u_2v_2, u_5v_4, u_7v_7; \\ 4 \text{ untuk } e = cu_6, cu_7, u_3v_2, u_5v_5, u_1v_7; \\ 5 \text{ untuk } e = cu_5, u_3v_3, u_6v_5. \end{cases}$$

Jelas bahwa dengan $p_{12} : E(J_{2,7}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$, untuk setiap dua titik a dan b di $J_{2,7}$, selalu terdapat lintasan-(a, b) *geodesic*, sehingga diperoleh $src(J_{2,7}) \leq 5$. Dengan demikian, terbukti bahwa $src(J_{2,7}) = 5$.

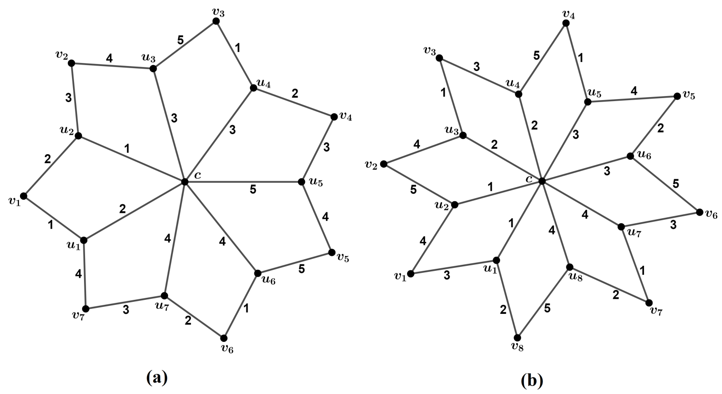
(b) $m = 8$

Diketahui sebelumnya bahwa $src(J_{2,8}) \geq 4$. Jika pada graf $J_{2,8}$ diberikan 4-warna, tanpa mengurangi perumuman akan terdapat dua titik a dan b di $J_{2,8}$ yang tidak ada lintasan-(a, b) *geodesic*. Akibatnya, diperoleh bahwa $scr(J_{2,8}) \geq 5$. Misalkan graf Jahangir $J_{2,8}$ dengan $V(J_{2,8}) = \{c, u_1, u_2, ..., u_8, v_1, v_2, ..., v_8\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut.

$$p_{13}(e) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } e = cu_1, cu_2, u_3v_3, u_5v_4, u_7v_7; \\ 2 \text{ untuk } e = cu_3, cu_4, u_6v_5, u_8v_7, u_1v_8; \\ 3 \text{ untuk } e = cu_5, cu_6, u_1v_1, u_4v_3, u_7v_6; \\ 4 \text{ untuk } e = cu_7, cu_8, u_2v_1, u_3v_2, u_5v_5; \\ 5 \text{ untuk } e = u_2v_2, u_4v_4, u_6v_6, u_8v_8. \end{cases}$$

Jelas bahwa dengan $p_{13} : E(J_{2,8}) \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$, untuk setiap dua titik a dan b di $J_{2,8}$, selalu terdapat lintasan-(u, v) *geodesic*, sehingga diperoleh $src(J_{2,8}) \leq 5$. Dengan demikian, terbukti bahwa $src(J_{2,8}) = 5$.

Jadi, bilangan *strong rainbow connection* graf $J_{2,m}$ untuk $7 \leq m \leq 8$ adalah $src(J_{2,m}) = 5$. Ilustrasi *strong rainbow connection* untuk graf $J_{2,7}$ dan $J_{2,8}$ dapat dilihat pada Gambar 6 berikut.



(a) (b)

Gambar 6. (a) $src(J_{2,7}) = 5$ dan (b) $src(J_{2,8}) = 5$

$\square$

4. Kesimpulan

Pada tulisan ini diperoleh bilangan *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* graf Jahangir $J_{2,m}$ untuk $2 \leq m \leq 8$ dengan hasil sebagai berikut.

Misalkan terdapat graf Jahangir $J_{2,m}$ dengan $2 \leq m \leq 8$, maka bilangan *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* graf $J_{2,m}$ adalah

$$rc(J_{2,m}) = \begin{cases} 2, \text{ untuk } m = 2; \\ 3, \text{ untuk } m = 3; \\ 4, \text{ untuk } 4 \leq m \leq 8; \end{cases}$$

$$src(J_{2,m}) = \begin{cases} 2, \text{ untuk } m = 2; \\ 3, \text{ untuk } m = 3; \\ 4, \text{ untuk } 4 \leq m \leq 6; \\ 5, \text{ untuk } 7 \leq m \leq 8. \end{cases}$$

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis menngucapkan terima kasih kepada Mahdhivan Syafwan, Narwen, dan Nova Noliza Bakar yang telah memberikan kritikan dan masukan sehingga tulisan ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Asmara, D.N., S. Sy dan E. Effendi. 2018. Bilangan *Rainbow Connection* dan *Strong Rainbow Connection* Pada Graf Jahangir $J_{2,m}$. *Jurnal Matematika Unand*. **8**(1): 52-58

[2] Chartrand, G. dan P. Zhang. 2005. *Introduction to Graph Theory*. Mc Graw-Hill International Edition, Singapore

[3] Chartrand, G.L., K.A. Johns, McKeon and P. Zhang. 2008. Rainbow Connection in Graph. *Math. Bohem.* **133**: 85-98

[4] Li, X and Y. Sun. 2013. On Strong Rainbow Connection Number of a Graph. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc (2)*. **36**: 299-311

[5] Naduvath, S. and J. Kok. A Note on J-Colouring of Jahangir Graphs. *Proc. Natl. Acad. Sci, A: Phys. Sci.* **90**, 819-821 (2020). *http://doi.org/10.1007/s40010-019-00638-z*

[6] Surahmat and I. Tomescu. 2014. On Path-Jahangir Ramsey Numbers. *Appl. Math. Sci (8)*. **99**: 4899-4904

[7] Sy, S., G.H. Medika and L. Yulianti. 2013. The Rainbow Connection Number of Fan and Sun. *Appl. Math. Sci.* **7** : 3155-3160

[8] Yulianti, L., A. Nazra, M. Muhardiansyah and N. Narwen. On the Rainbow Connection Number of Triangle-net Graphs. *IOP Conf Series: Journal of Physics: Conf Series* 1836 (2021) 012004. *https://doi.org/10.1088/1742-6596/1/1836/012004*